3.3 Mehrfache Vektorprodukte

3.3.1 Doppeltes Kreuzprodukt

$\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = \underline{b}(\underline{a}\cdot\underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}\cdot\underline{b})$ (bac-cab-Regel, selbständig überprüfen)

Ergebnis des doppelten Kreuzprodukts aus den drei Vektoren ist ein Vektor in der b-c-Ebene.

■ $\| - \perp -$Zerlegung (PB, S. 19)

Jeder Vektor a kann in einen Anteil parallel $\underline{a}_{\|}$ und einen Anteil $\underline{a}_{\perp}$ senkrecht zu einer bestimmten Richtung (gegeben durch den EHV $\underline{e}$) aufgespalten werden

$\underline{a} = \underline{a}_{\|} + \underline{a}_{\perp}$,

wobei $\underline{a}_{\|} = (\underline{a}\cdot\underline{e})\underline{e}$ und $\underline{a}_{\perp} = \underline{e}\times(\underline{a}\times\underline{e})$ gelten.

Der Ausdruck für $\underline{a}_{\|}$ ist offensichtlich, der für $\underline{a}_{\perp}$ folgt unter Verwendung der bac-cab-Regel

$\underline{a}_{\perp} = \underline{a} - \underline{a}_{\|} = \underline{a}(\underline{e}\cdot\underline{e}) - \underline{e}(\underline{a}\cdot\underline{e}) = \underline{e}\times(\underline{a}\times\underline{e})$ Offensichtlich gilt $\underline{a}_{\|} = (\underline{a}\cdot\underline{e})\underline{e}$

3.3.1 Spatprodukt

$$\underline{a}\cdot(\underline{b}\times\underline{c}) = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

(überprüfen!). Im Spatprodukt sind zyklische Vertauschungen der Faktoren erlaubt (warum?)

$(\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c} = (\underline{b}\times\underline{c})\cdot\underline{a} = (\underline{c}\times\underline{a})\cdot\underline{b}$.

Geometrisch ist das Spatprodukt der Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{c}$ die Zahl, deren Betrag gleich dem Volumen des Parallelepipeds mit den Kanten $\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{c}$ ist. (Skizze V)

■ Beachte und überprüfe

$$(\underline{a}\times\underline{b})\cdot(\underline{c}\times\underline{d}) = (\underline{a}\cdot\underline{c})\cdot(\underline{b}\cdot\underline{d}) - (\underline{a}\cdot\underline{d})\cdot(\underline{b}\cdot\underline{c})\,.$$

Beispielsweise gilt die häufig verwendete Beziehung

$$(\underline{a}\times\underline{b})^2 = a^2 b^2 - (\underline{a}\cdot\underline{b})^2$$

5. Vektorfunktionen (→ vektorwertige Funktionen)

5.1 Definition, Ableitung

Eine Vektorfunktion ist eine Menge von geordneten Paaren (t, $\underline{r}$(t)) in $R^1 \times R^n$. Die zugelassenen Zahlenwerte t bestimmen den Definitionsbereich, die zugeordneten Vektoren $\underline{r}$(t) den Wertebereich.

Geometrische Deutung als Raumkurve im R^3

■ Bahnkurve/Ortsvektor/Radiusvektor $\underline{r}$(t) des Massepunkts M

(Skizze V)

Folgende gleichwertige Darstellungen werden wir verwenden (kartesisches KS):

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \left(x(t),\, y(t),\, z(t) \right)^T = x(t)\,\underline{e}_x + y(t)\,\underline{e}_y + z(t)\,\underline{e}_z = \sum_{i=1}^{3} x_i(t)\ \underline{e}_i = x_i(t)\ \underline{e}_i \quad \text{usw.}$$

Ableitung der Vektorfunktion r(t): $\dfrac{d\underline{r}}{dt} := \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t} =: \dot{\underline{r}}(t)$.

Der Vektor $\dfrac{d\underline{r}}{dt}$ ist entlang der Tangente an die Raumkurve im Punkt $\underline{r}$ (t) gerichtet.

Aquivalente Notationen:

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)^T = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{pmatrix} = \frac{dx}{dt}\underline{e}_x + \frac{dy}{dt}\underline{e}_y + \frac{dz}{dt}\underline{e}_z = \frac{dx_i}{dt}\underline{e}_i = \ldots \quad \text{usw.}$$

Beachte: Für die zeitliche Änderung Betrages r = | $\underline{r}$ | des Vektors $\underline{r}$ (des Abstands vom Koordinatenursprung) folgt

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{2x\dot{x}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{y\dot{y}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{z\dot{z}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\underline{r}\cdot\dot{\underline{r}}}{r} = \dot{\underline{r}}\cdot\frac{\underline{r}}{r} = \dot{\underline{r}}\cdot\underline{e}_r$$

Der EHV $\underline{e}_r$ ändert seine Richtung im Laufe der Zeit. Im Gegensatz zu den EHV entlang der Achsen des kartesischen KS ist er nicht zeitunabhängig.

Ableitungen höherer Ordnung werden rekursiv definiert: $\dfrac{d^n}{dt^n}\underline{r}(t) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\underline{r}(t)\right)$

Bei der Differentiation von Vektorfunktionen müssen die Regeln der Differentiation von Funktionen einer unabhängigen Variablen und die Regeln der Vektoralgebra berücksichtigt werden.

■ Beispiel: Produktregeln der Vektordifferentiation:

$$\frac{d}{dt}\left[f(t)\,\underline{a}(t)\right] = \frac{df(t)}{dt}\,\underline{a}(t) + f(t)\,\frac{d}{dt}\underline{a}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\underline{a}(t)\cdot\underline{b}(t)\right] = \underline{b}(t)\cdot\frac{d}{dt}\underline{a}(t) + \underline{a}(t)\cdot\frac{d}{dt}\underline{b}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\underline{a}(t)\times\underline{b}(t)\right] = \left[\frac{d}{dt}\underline{a}(t)\right]\times\underline{b}(t) + \underline{a}(t)\times\frac{d}{dt}\underline{b}(t)$$

■ Die Ableitung einer Vektorfunktion mit konstantem Betrag steht $\perp$ auf dem Vektor

$\underline{a}^2(t) = \text{const},\quad \underline{a}\cdot\frac{d\underline{a}}{dt} + \frac{d\underline{a}}{dt}\cdot\underline{a} = 2\underline{a}\cdot\frac{d\underline{a}}{dt} = 0$ $\rightarrow$ das ist speziell für alle EHV nützlich.

■ Für eine vektorwertige Funktion $\underline{a}(t)$ mit Betrag $a(t)$ gilt

$$\underline{a}\cdot\frac{d\underline{a}}{dt} = a\,\frac{da}{dt},\ \text{denn}\ \underline{a} = a\,\underline{e},\ \frac{d\underline{a}}{dt} = \frac{da}{dt}\underline{e} + a\,\frac{d\underline{e}}{dt}\ \Bigg|\cdot\ a\underline{e}$$

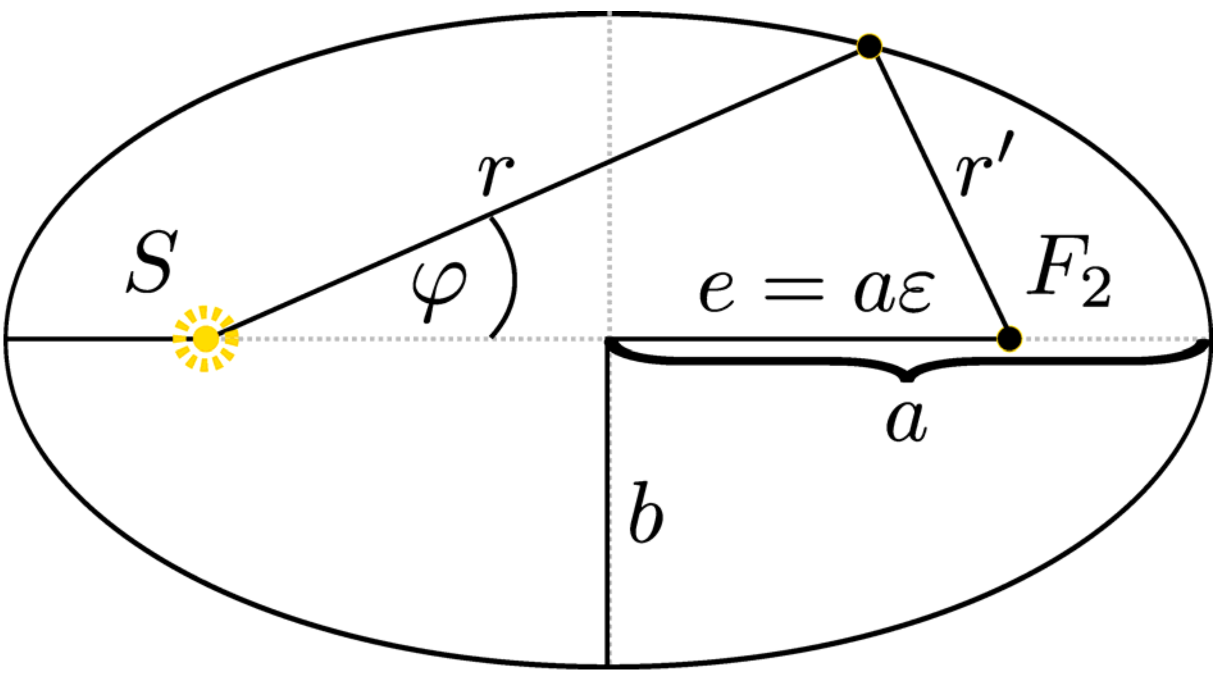
■■■ Isaac Newton leitet das Gravitationsgesetz aus den Gesetzen der Planetenbewegung von Johannes Kepler ab.

Bei dieser Ableitung spielt die Bahnkurve eine entscheidende Rolle. Ist $\underline{r}$ (t) die Position des Planeten zum Zeitpunkt t, dann ist $\dot{\underline{r}}(t)$ seine momentane Geschwindigkeit und $\ddot{\underline{r}}(t)$ seine momentane Beschleunigung. Nach der Newton´schen Bewegungsgleichung kann man aus der Beschleunigung auf die einwirkende Kraft schließen

$$\underline{F}(\underline{r}) = m\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = m\ddot{\underline{r}} \quad (m = \mathrm{const}). \qquad \text{(A)}$$

<u>1. Kepler´sches Gesetz:</u> Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht (ebene Bahnkurve!).

Die Ellipse ist der geometrischer Ort aller Punkte, für die Summe der Abstände von zwei festen Punkten, den sogenannten Brennpunkten, konstant ist: $r + r' = \mathrm{const} = 2a$. Auf dem Übungsblatt hat Julia Kabuß die Bahn des Planeten um die Sonne graphisch veranschaulicht:



Aus rein geometrischen Überlegungen lässt sich die Bahnkurve in Polarkoordinaten wie folgt darstellen (Rechnungen Übungsblatt):

$$r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi} \quad , \qquad\qquad (B)$$

wobei $p := \frac{b^2}{a} \leq b$ der sogenannte Bahnparameter ist und $\varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ gilt.

<u>2. Kepler´sches Gesetz:</u> Der Leitstrahl Sonne-Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Der in einem kleinen Zeitintervall überstrichene Flächensektor ist proportional zur verstrichenen Zeit. Das bedeutet (Übungsblatt)

$$r^2\dot{\varphi} = \text{const} =: \frac{L}{m} \qquad\qquad (C) \quad \text{(Drehimpulserhaltung).}$$

Zur Bestimmung der Beschleunigung $\ddot{\underline{r}}(t)$ differenzieren wir die Bahnkurve

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = r(t)\begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

unter Berücksichtigung von (B) und (C) zweimal nach der Zeit. Wir erhalten im ersten Schritt

$$\dot{\underline{r}}(t) = \frac{L}{mp}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ -\varepsilon + \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

und daraus schließlich das Ergebnis (Übungszettel)

$$\ddot{\underline{r}}(t) = \frac{L}{pm}\begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\dot{\varphi} = -\frac{L^2}{pm^2}\frac{1}{r^2}\frac{\underline{r}}{r}.$$

Beachte: $\underline{e}_r := \frac{\underline{r}}{r}$ ist der *zeitabhängige* EHV in r-Richtung mit den Komponenten $(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)^T$.

Interpretation des Ergebnisses:

Bei der Planetenbewegung ist die Beschleunigung umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands und von Planet zur Sonne gerichtet (- $\underline{r}$ / r).

$$m\frac{d^2\underline{r}}{dt^2}=m\ddot{\underline{r}}=-\frac{L^2}{pm}\frac{1}{r^2}\frac{\underline{r}}{r}=\underline{F}(\underline{r}) \;.$$

Aus Symmetriegründen (vertausche Planet und Sonne) setzt man unter Einführung der Gravitationskonstanten γ $\frac{L^2}{pm^2}=\gamma M$ und erhält so die vertraute Form des Newton´schen Gravitationsgesetzes

$$\underline{F}_G(\underline{r})=\frac{\gamma m M}{r^2}\frac{\underline{r}}{r} \;.$$

Bemerkungen

(i) Offensichtlich ist der Bahnparameter p vollständig durch die Massen m und M, den Betrag des Drehimpulses L und die Gravitationskonstante γ bestimmt

$$p=\frac{L^2}{\gamma M m^2} \;.$$

(ii) Die Bahnexzentrizität ε hängt auch von der Gesamtenergie E ab

$$\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}}=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{m(\gamma mM)^2}} \;;$$

letztere ist wie der Drehimpuls ebenfalls eine Erhaltungsgröße/ein Integral der Bewegung.

(iii) Newton schließt aus Bahnkurve und Flächensatz auf ein Kraftgesetz mit $F\sim r^{-2}$. Die Bahnkurven sind Ellipsen, also geschlossen. Im Fall $F\sim r^{-(2+\delta)}$ sind die Bahnkurven für beliebig kleines δ nicht geschlossen, vgl. Periheldrehung des Merkur, letztere ist ein relativistischer Effekt, der erst im Rahmen der ART verstanden wurde.

(iv) Im Fall $F\sim r^{-2}$ sind auch (offene) Hyperbelbahnen möglich; Streuung, Rutherford´sche Streuformel

Zwei weitere Beispiele im Zusammenhang mit der Differentiation von Vektorfunktionen:

■ **Drehimpuls**

Zeitliche Änderung des Drehimpulses $\underline{L} := \underline{r} \times \underline{p} = m\, \underline{r} \times \dot{\underline{r}}$:

$$\dot{\underline{L}} := m\, \dot{\underline{r}} \times \dot{\underline{r}} + m\, \underline{r} \times \ddot{\underline{r}} = \underline{r} \times \underline{F} = \underline{M} \;.$$

Für sogenannte Zentralkräfte der Form $\underline{F}(\underline{r}) = F(\underline{r})\frac{\underline{r}}{r}$ ist $\dot{\underline{L}} = 0$, d.h. $\underline{L}$ = const (unabhängig von t). Bei Bewegung in Zentralfeldern gilt also Drehimpulserhaltung (bzgl. Kraftzentrum). Das bedeutet, die Bahnkurven sind eben.

Bem: Gleiches Ergebnis, wenn man NBWG für ein Teilchen vektoriell mit $\underline{r}(t)$ multipliziert.

■ **Energie und Potential**

Ausgehend von der Newton´schen Bewegungsgleichung finden wir

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} \;\Big|\cdot \dot{\underline{r}}\,, \qquad m\dot{\underline{r}} \cdot \ddot{\underline{r}} = \dot{\underline{r}} \cdot \underline{F} \quad \text{und} \quad \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2\right)}_{\substack{\text{Zuwachs der kine-}\\ \text{tischen Energie}}} = \underbrace{\frac{d\underline{r} \cdot \underline{F}}{dt}}_{\substack{\text{in dt am Teilchen}\\ \text{geleistete Arbeit}}} \;.$$

Annahme: Es existiere eine skalare Funktion $U(\underline{r}) \rightarrow$ Potenzial mit

$$\underline{F}(\underline{r}) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \\ \partial_z U \end{pmatrix} =: -\operatorname{grad} U(\underline{r}) \,.$$

Dann ist

$$\frac{dU(\underline{r}(t))}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt} = -\,\dot{\underline{r}}(t)\cdot\underline{F}(\underline{r}) \;,$$

folglich gilt

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 + U(\underline{r})\right] = 0$$

bzw.

$$\frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 + U(\underline{r}) =: E = \mathrm{const}$$

Interpretation: Erhaltung der mechanischen Energie als Summe aus kinetischer und potentieller Energie.