9. Felder

Unterscheide *skalare* und *vektorielle* Felder:

Skalares Feld: Zuordnung: $\underline{r} \mapsto \phi(\underline{r})$, also jedem Ortsvektor $\underline{r}$ im R^3 eine skalare Größe ϕ.

z.B.: Druck- oder Temperaturverteilung $p(\underline{r},t)$ bzw. $T(\underline{r},t)$; Dichten von Masse, Ladung, Energie und anderen skalaren Größen als Funktionen des Ortsvektors $\underline{r}$ und eventuell der Zeit (stationäre bzw. zeitlich veränderliche Felder).

Vektorfeld: Zuordnung: $\underline{r} \mapsto \underline{A}(\underline{r})$, also jedem Ortsvektor $\underline{r}$ im R^3 eine vektorielle Größe $\underline{A}(\underline{r})$.

z.B.: Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit $\underline{u}(\underline{r},t)$, elektrische Feldstärke $\underline{E}(\underline{r},t)$ und magnetische Induktion $\underline{B}(\underline{r},t)$ des elektromagnetischen Feldes sowie natürlich alle Kraftfelder.

■ Gravitationsfeld, Anziehungskraft zwischen zwei Massen m und M (vgl. letzte Woche → Planetenbewegung)

$$\underline{F}(\underline{r}) = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}$$

■ Coulomb-Feld

, anziehende oder abstoßende Kraft zwischen zwei ruhenden Punktladungen q und Q, Betrag fällt ebenfalls proportional zum Quadrat des Abstandes und ist entlang der Verbindungslinie beider Punktladungen gerichtet

$$\underline{F}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}$$

■ Stokes´sche Kraft: Reibungskraft auf eine (laminar) umströmte Kugel mit Radius R in einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit mit der dynamischen Viskosität η

$$\underline{F}(\dot{\underline{r}}) = -6\pi\eta R\,\dot{\underline{r}}$$

(in turbulenten Strömungen wächst F nichtlinear mit $v = \dot{r}$,
vgl. Karman´sche Wirbelstraße)

Skizze: laminar umströmte Kugel

■ Lorentz-Kraft auf eine bewegte Punktladung (q, $\dot{\underline{r}}$) im elektromagnetischen Feld ($\underline{E}$, $\underline{B}$)

$$\underline{F}(\underline{r},\dot{\underline{r}},t) = q\left[\,\underline{E}(\underline{r},t) + \dot{\underline{r}} \times \underline{B}(\underline{r},t)\,\right]$$

9.1 Gradient eines skalaren Feldes

Erinnere: Kettenregel bei Funktionen mehrerer Veränderlicher

Für $\phi(x(t))$ ist $\dfrac{d\phi(x(t))}{dt} = \dfrac{d\phi(x)}{dx}\dfrac{dx(t)}{dt}$.

Für eine Funktion ϕ mehrerer unabhängiger Veränderlicher, z. B. $\phi(x_1(t_1), x_2(t_2), x_3(t_3))$, gilt

$$\frac{d\phi}{dt_1} = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt_1} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \equiv \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)_{x_2=x_3=\text{const}}$$

als der *partiellen* Ableitung von ϕ nach x_1.

Hängt ϕ implizit nur von einer unabhängigen Variablen (z.B. t) ab, dann ändern sich mit t alle x_i gleichzeitig. In diesem häufig anzutreffenden Fall gilt

$$\frac{d\phi\big(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\big)}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} \stackrel{\circ}{=} \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}$$

($\stackrel{\circ}{=}$ Summenkonvention also Summation über i, i = 1, 2, 3).

Man nennt $\frac{d\phi}{dt}$ die "<u>totale Ableitung</u>" von ϕ nach t und

$d\phi = \frac{d\phi}{dt}dt = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}dx_3 = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}dx_i$ das "<u>totale Differential</u>" von ϕ.

Im Folgenden sei die Stetigkeit des skalaren Feldes ϕ und seiner partiellen Ableitungen in allen Variablen vorausgesetzt. In diesem Falle lässt sich zeigen, dass für partielle Ableitungen zweiter Ordnung die Reihenfolge der Bildung der Ableitung keine Rolle spielt, also

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_j \partial x_i}$$

gilt.

Die Änderung eines skalaren Feldes $\phi(\underline{r}) = \phi(x,y,z)$ in Richtung $d\underline{r} = (dx, dy, dz)$ setzt sich additiv aus den Änderungen parallel zu den drei Koordinatenachsen zusammen

$$d\phi(x,y,z) = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz\,.$$

Def.: Das <u>Vektor</u>feld mit den Komponenten

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^T =: \mathrm{grad}\,\phi(\underline{r}) =: \underline{\nabla}\,\phi(\underline{r})$$

heißt **Gradientenfeld** des skalaren Feldes $\phi(\underline{r})$.

Dabei bezeichnet $\underline{\nabla}$ den Vektor-Differentialoperator

$$\underline{\underline{\nabla} = \underline{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \underline{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \underline{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}}\ ,$$

den sogenannten **Nabla-Operator** (hier in kartesischen Koordinaten!).

Offensichtlich gilt $\underline{d\phi(\underline{r}) = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = \operatorname{grad} \phi(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = \underline{\nabla}\phi(\underline{r}) \cdot d\underline{r}}$.

<u>Fazit:</u> Die Änderung des skalaren Feldes $\phi(\underline{r})$ in Richtung $d\underline{r}$ ist gleich der Projektion des Gradienten von ϕ im Punkt $\underline{r}$ auf $d\underline{r}$ $\rightarrow$ **Richtungsableitung**.

- Geometrische Veranschaulichung am Beispiel eines ebenen skalaren Feldes $\phi(x,y)$

Bei Bewegung entlang einer Aquipotenzial-linie ϕ = const hat $d\underline{r}$ die Richtung der Tangenten an diese. Aus $d\phi = \operatorname{grad}\phi \cdot d\underline{r} = 0$ erkennen wir, dass der Gradient senkrecht auf den Äquipotenzial-linien steht (in Richtung des steilsten Anstiegs im "ϕ - Gebirge" zeigt). Also ist $|\operatorname{grad} \phi|$ ein Maß für die Änderung von ϕ $\perp$ zu ϕ = const ist.

Skizze: Gradienten von $\phi(x,y)$

<u>Bemerkung:</u> Das Tripel $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^T$ transformiert sich bei Drehung des Koordinaten-systems wie die Komponenten eines Vektors und kann deshalb als Vektor aufgefasst werden. Mehr dazu vgl. §3.6., Großmann S. 127 und § 1.4. S. 40 des Buches von S. Großmann, z.B.

9.2 Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes

Wir wenden den Nabla-Operator zunächst rein formal auf Vektorfelder $\underline{A}(\underline{r})$ an.

1. Möglichkeit: Skalarprodukt aus den Vektoren $\underline{\nabla}$ und $\underline{A}(\underline{r})$

Def.: Der Skalar $$\underline{\underline{\nabla} \cdot \underline{A}(\underline{r}) =: \operatorname{div}\underline{A}(\underline{r}) =: \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial Ay}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}}$$

heißt **Divergenz des** (stetig differenzierbaren) Vektorfeldes $\underline{A}(\underline{r})$ im Punkt $\underline{r}$.
Das skalare Feld div $\underline{A}(\underline{r})$ wird **Quellenfeld** des Vektorfeldes $\underline{A}(\underline{r})$ genannt.

- Geometrische Interpretation der Divergenz als lokale Quellstärke eines Strömungsfeldes

Ohne Beweis: Massendichte $\rho(\underline{r}, t)$ und Stromdichte $\underline{j}(\underline{r}, t) = \rho(\underline{r}, t) \cdot \underline{v}(\underline{r}, t)$ genügen der sogenannten Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j} = 0$ (lokale Schreibweise der Masseerhaltung). Die über die Oberfläche eines infinitesimal kleinen Volumen δV um $\underline{r}$ ausfließende (einfließende) Flüssigkeitsmenge ist gleich der Abnahme (Zunahme) der Dichte in δV. Damit ist die Divergenz ein Maß für die *lokale* Quellstärke des Feldes im Punkt $\underline{r}$.

WICHTIG: Bei der Anwendung des Operators $\underline{\nabla}$ auf Funktionen sind sowohl die Regeln der Vektoralgebra als auch die der Differentialrechnung zu beachten.

■ $$\operatorname{div}(\underline{A} \times \underline{B}) = \underline{\nabla} \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) \underset{\text{zyklisch}}{=} (\overset{\downarrow}{\underline{\nabla}} \times \overset{\downarrow}{\underline{A}}) \cdot \underline{B} + (\overset{\downarrow}{\underline{B}} \times \overset{\downarrow}{\underline{\nabla}}) \cdot \underline{A} = \underline{B} \cdot \operatorname{rot}\underline{A} \underset{!}{-} \underline{A} \cdot \operatorname{rot}\underline{B}$$

Die sich aus der $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$ - Regel der Vektoralgebra ergebende Reihenfolge $\overset{\downarrow}{\underline{B}} \times \overset{\downarrow}{\underline{\nabla}}$ muss "korrigiert" werden, damit die Produktregel der Differenzialrechnung nicht verletzt wird. Das ist natürlich kein Beweis; dieser ist am einfachsten komponentenweise zu führen. Weitere Beispiele Übung.

2. Möglichkeit: Vektorprodukt aus $\underline{\nabla}$ und $\underline{A}(\underline{r})$

Def.: Der Vektor

$$\underline{\nabla}\times\underline{A}(\underline{r}) =: \mathrm{rot}\underline{A}(\underline{r}) =: \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\underline{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\underline{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\underline{e}_z$$

heißt **Rotation** des (stetig differenzierbaren) Vektorfelds $\underline{A}(\underline{r}) = A_x(\underline{r})\underline{e}_x + A_y(\underline{r})\underline{e}_y + A_z(\underline{r})\underline{e}_z$ im Punkt $\underline{r}$. Das Vektorfeld rot $\underline{A}(\underline{r})$ wird → **Wirbelfeld** von $\underline{A}(\underline{r})$ genannt.

Mit Hilfe des Levi-Chevita Symbols lassen sich die Komponenten des Rotors darstellen als

$(\mathrm{rot}\underline{A})_i = \varepsilon_{ijk}\dfrac{\partial A_k}{\partial x_j}$, also ist $\mathrm{rot}\underline{A} = \varepsilon_{ijk}\dfrac{\partial A_k}{\partial x_j}\underline{e}_i$ (Summenkonvention!).

- Geometrische Interpretation der Rotation als lokale Wirbelstärke eines Strömungsfeldes

Wir betrachten das Geschwindigkeitsfeld
$\underline{u}(\underline{r}) = \underline{\omega}\times\underline{r}$ eines homogenen ($\underline{\omega}$ = const)
Wirbels in einer Flüssigkeitsströmung als
Maß für die "Stärke" des Wirbels".
Dann gilt

$$\mathrm{rot}\,\underline{u}(\underline{r}) = \underset{a}{\underline{\nabla}}\times(\underset{b}{\underline{\omega}}\times\underset{c}{\underline{r}}) \underset{\text{Vektoralgebra}}{=} \underline{\omega}(\underline{\nabla}\cdot\underline{r}) - \overset{\downarrow}{\underline{r}}(\overset{\downarrow}{\underline{\nabla}}\cdot\underline{\omega}) \underset{\text{Differentiation}}{=} \underline{\omega}(\underline{\nabla}\cdot\underline{r}) - (\underline{\omega}\cdot\underline{\nabla})\underline{r} =$$

$$= \underline{\omega}\left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) - \begin{pmatrix} (\underline{\omega}\cdot\underline{\nabla})\,x \\ (\underline{\omega}\cdot\underline{\nabla})\,y \\ (\underline{\omega}\cdot\underline{\nabla})\,z \end{pmatrix} = 3\underline{\omega} - \begin{pmatrix} (\omega_x\frac{\partial}{\partial x} + \omega_y\frac{\partial}{\partial y} + \omega_z\frac{\partial}{\partial z})\,x \\ (\underline{\omega}\cdot\underline{\nabla})\,y \\ (\underline{\omega}\cdot\underline{\nabla})\,z \end{pmatrix} = 3\underline{\omega} - \underline{\omega} = 2\underline{\omega}\,.$$

Die Rotation zeigt in Richtung der Wirbelachse, der Betrag der Rotation des Feldes ist gleich 2 ω, also der doppelten Winkelgeschwindigkeit bzw. "Stärke" des Wirbels.

Anschauliche Interpretation: Rotationsgeschwindigkeit und Orientierung eines infinitesimal kleinen "Schaufelrädchen"

■ Wenn $\underline{A}$ = grad ϕ, dann rot $\underline{A}$ = rot grad $\phi = 0 \rightarrow$ **Gradientenfelder sind wirbelfrei**.

Beweis: $(\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$,

analog für die y- und die z-Komponente.

Alternativer "Beweis": $\mathrm{grad}\,\phi = \underline{\nabla}\phi$ hat die "Richtung von $\underline{\nabla}$", daher ist das Vektorprodukt $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi = \underline{\nabla} \times \underline{\nabla}\,\phi = 0$.

■ Wenn $\underline{B}$ = rot $\underline{A}$, dann div $\underline{B}$ = div rot $\underline{A} = 0 \rightarrow$ **Wirbelfelder sind quellenfrei**.

Komponentenweise z.B. $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\underline{A} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j} = 0$.

Alternativ: "Spatprodukt" $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\underline{A} = \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{A}) = 0$.

• Der Helmholtz´sche Hauptsatz der Vektoranalysis (1859) unterstreicht, warum Divergenz und Rotation definierende Eigenschaften eines Vektorfeldes sind. Er besagt:

Ein über einem einfach zusammenhängenden Gebiet mit (stückweise) glatter Randfläche definiertes Vektorfeld $\underline{A}$(r) lässt sich stets additiv in einen wirbelfreien und einen quellenfreien Anteil zerlegen:

$\underline{A}(\underline{r}) = \underline{A}_1(\underline{r}) + \underline{A}_2(\underline{r})$ mit rot $\underline{A}_1(\underline{r}) = 0$ und div $\underline{A}_2(\underline{r}) = 0$,

sofern $A(r \rightarrow \infty)$ asymptotisch gegen Null abfällt. Aus Quell- und Wirbelstärke eines Vektorfeldes lässt sich das Feld selbst rekonstruieren:

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \left[\rho(\underline{r}')\,\mathrm{grad}' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} - \underline{\omega}(\underline{r}') \times \mathrm{grad}' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right], \text{ mit } \rho = \mathrm{div}\,\underline{A}\,,\ \underline{\omega} = \mathrm{rot}\,\underline{A}\,.$$

(vgl. S. Großmann, § 9.5., S. 312).