Kurze Wiederholung Felder I:

Wir kennen bereits folgende Operationen mit dem Nabla-Operator

$\underline{\nabla}\,\phi(\underline{r}) =: \mathrm{grad}\,\phi(\underline{r})$ $\qquad$ $\underline{\nabla} \cdot \underline{A}(\underline{r}) =: \mathrm{div}\underline{A}(\underline{r})$ $\qquad$ $\underline{\nabla} \times \underline{A}(\underline{r}) =: \mathrm{rot}\underline{A}(\underline{r})$

Aus dem skalaren Feld $\phi(\underline{r})$ entsteht das Vektorfeld grad $\phi(\underline{r})$.

Aus dem Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r})$ entsteht das skalare Feld div $\underline{A}(\underline{r})$ → lokale Quellstärke bzw. das Vektorfeld rot $\underline{A}(\underline{r})$ → lokale Wirbelstärke des Feldes $\underline{A}(\underline{r})$ im Punkt $\underline{r}$

Beachte: Die Änderung $d\phi(\underline{r})$ des skalaren Feldes $\phi(\underline{r})$ in Richtung $\underline{dr}$ ist gleich

$$d\phi(\underline{r}) = \mathrm{grad}\,\phi(\underline{r}) \cdot \underline{dr}\,,$$

also gleich der Projektion des Gradienten grad $\phi(\underline{r})$ auf $\underline{dr}$.

5.4 Zweifache Nabla-Anwendungen

- Wenn $\underline{A}$ = grad ϕ, dann rot $\underline{A}$ = rot grad ϕ = 0 → **Gradientenfelder sind wirbelfrei**.

Wir haben die Komponenten

$$A_x = \frac{\partial\phi}{\partial x},\; A_y = \frac{\partial\phi}{\partial y},\; A_z = \frac{\partial\phi}{\partial z}\,.$$

Wegen $\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_j \partial x_i}$ für zweifach stetig differenzierbare ϕ sind alle Komponenten von rot $\underline{A}$ gleich Null, z.B.

$$(\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0\,.$$

Alternativ (unter "Ausnutzung der Vektoralgebra"):

$\mathrm{grad}\,\phi = \underline{\nabla}\phi$ hat die "Richtung von $\underline{\nabla}$", daher ist $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi = \underline{\nabla} \times \underline{\nabla}\,\phi = 0$.

Theorem: Ist das Vektorfeld $\underline{A}$ wirbelfrei, rot $\underline{A} = 0$, dann existiert ein skalares Feld ϕ, so dass $\underline{A} = \text{grad}\,\phi$. Dabei heißt ϕ das zu $\underline{A}$ gehörende skalare Potenzial.

■ Konservative Kraftfelder: $\underline{F} = -\,\text{grad}\,\phi$.

Test: Das Kraftfeld $\underline{F}$ ist konservativ, wenn rot $\underline{F} = 0$.

• Gilt $\underline{B} = \text{rot}\,\underline{A}$, dann ist div $\underline{B}$ = div rot $\underline{A} = 0$ $\rightarrow$ **Wirbelfelder sind quellenfrei**.

Komponentenweise: $\text{div}\,\text{rot}\,\underline{A} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j} = 0$.

Alternativ: "Spatprodukt" $\text{div}\,\text{rot}\,\underline{A} = \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{A}) = (\underline{\nabla} \times \underline{\nabla}) \cdot \underline{A} = 0$.

Theorem: Ist das Vektorfeld $\underline{B}$ quellenfrei, div $\underline{B} = 0$, dann existiert ein Vektorfeld $\underline{A}$, so dass $\underline{B} = \text{rot}\,\underline{A}$ gilt. $\underline{A}$ wird das zu $\underline{B}$ gehörende Vektorpotenzial genannt.

■ Die dritte Maxwell`schen Gleichung, div $\underline{B} = 0$, postuliert das Magnetfeld als quellenfrei. Dann darf es keine magnetischen Ladungen (magnetische Monopole) geben (!?). Außerdem folgt wegen $\underline{B} = \text{rot}\,\underline{A}$ die Existenz eines Vektorpotenzials $\underline{A}$. Die Maxwell´sche Gleichung wird durch "diesen Lösungsansatz" erfüllt.

• $\underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla}\,\phi) = (\underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla})\,\phi = \underline{\nabla}^2 \phi =: \Delta\phi$ $\rightarrow$ das ist ein skalares Feld

$\Delta =: (\underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ heisst **Laplace-Operator** (skalarer Operator).

Es ist $\Delta\phi = \text{div}\,\text{grad}\,\phi$.

Der Laplace-Operator kann auch auf ein Vektorfeld $\underline{A}$ angewendet werden. Per Definition gilt

$$\Delta\underline{A} := \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \text{das ist ein Vektorfeld.}$$

- $$\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A}) = \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}) - (\underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla})\underline{A}$$

  $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

  $\underline{a} \times (\underline{b}\times\underline{c}) \qquad \underline{b}\,(\underline{a}\cdot\underline{c}) \;-\; (\underline{a}\cdot\underline{b})\,\underline{c}$

oder $\quad \text{rot}\,\text{rot}\,\underline{A} = \text{grad}\,\text{div}\,\underline{A} - \Delta\,\underline{A}$

■ Für quellenfreie Felder (z.B. das Strömungsfeld inkompressibler Flüssigkeiten) gilt wegen div $\underline{A} = 0$ dann ist $\text{rot}\,\text{rot}\,\underline{A} = -\Delta\,\underline{A}$.

- Die letzte zweifache $\underline{\nabla}$ - Anwendung ist

$$\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}) = \text{grad}\,\text{div}\,\underline{A} \qquad \rightarrow \qquad \text{das ist ein Vektorfeld.}$$

<u>Beachte:</u> (i) Für zwei skalare Felder ϕ und ψ ist i. A. $(\underline{\nabla}\,\phi)\cdot(\underline{\nabla}\,\Psi) \neq 0$, dagegen $(\underline{A}\,\phi)\cdot(\underline{A}\,\Psi) = 0$. $\underline{\nabla}\,\phi$ und $\underline{\nabla}\,\Psi$ zeigen i. A. nicht in die gleiche Richtung, $\underline{A}\,\phi$ und $\underline{A}\,\Psi$ dagegen schon.

(ii) Wir haben in kartesischen Koordinaten für die x-Komponente des Vektorfelds $\underline{\nabla}^2\underline{A}$

$$(\underline{\nabla}^2\underline{A})_x = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_x = \underline{\nabla}^2 A_x$$

und analog für die y- und z-Komponente. Das gilt aber nur für kartesische Koordinaten.
So ist z.B. die radiale Komponente $\underline{\nabla}^2\underline{A}$ nicht $\underline{\nabla}^2 A_r$ ….
Im nächsten Kapitel beschäftigen wir uns deshalb mit der Gestalt der Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinatensystemen.

6. Krummlinige Koordinaten

6.1 Motivation

Bisher: Kartesische Koordinaten mit $\underline{r} = x\,\underline{e}_x + y\,\underline{e}_y + z\,\underline{e}_z = x_i\,\underline{e}_i$.

Einheitsvektoren (Basisvektoren) orthonormiert, $\delta_{ik} = \underline{e}_i \cdot \underline{e}_k$, und raumfest.

Jetzt: Verwende der Symmetrie eines physikalischen Problems angepasste, krummlinige Koordinaten; z.B. Zylinder- oder Kugelkoordinaten.

Ein Punkt in der Ebene R^2 wird durch zwei Zahlen/Parameter festgelegt: $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

- kartesische Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ oder ebene Polarkoordinaten $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$.

Ein Punkt im Raum R^3 wird durch drei Zahlen/Parameter festgelegt: $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$.

- Zylinderkoordinaten $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}$ oder Kugelkoordinaten $\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$.

6.2 Die Funktionaldeterminante einer Koordinatentransformation

Der Anschaulichkeit halber betrachten wir den ebenen, zweidimensionalen Fall. Die Transformationsformeln

$$\begin{matrix} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{matrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{matrix} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{matrix}$$

für den Übergang $(x,y) \rightarrow (u,v)$ und umgekehrt sollen zumindest lokal eindeutig sein.

Wir betrachten die Umgebung $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ eines Punktes $P(x,y) = P(u,v)$. Aus der Taylor-Entwicklung in $P(x,y)$ folgt in linearer Näherung bzgl. Δx und Δy für Δu und Δv

$$\Delta u := u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) \cong \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y$$

$$\Delta v := v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y) \cong \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y$$

Zu jedem Paar $(\Delta x, \Delta y)$ existiert ein wohlbestimmtes Paar $(\Delta u, \Delta v)$ in der Umgebung des Punktes P. Damit dies auch umgekehrt der Fall, die Koordinatentransformation also in der Umgebung von P <u>eineindeutig</u> ist, muss die Koeffizientendeterminante des obigen inhomogenen linearen Gleichungssystems ungleich Null sein ($\rightarrow$ Kramer´sche Regel).

Def.: Die aus den partiellen Ableitungen der Funktionen u(x,y) und v(x,y) nach x und y gebildete Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} =: \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

heisst **Funktionaldeterminante** der Transformation $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$.

Die Transformationsformeln beschreiben in der Umgebung eines Punktes P genau dann eine eineindeutige Zuordnung $(x,y) \leftrightarrow (u,v)$, wenn $\left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{P(x,y)} \neq 0$ und (für die Rücktransformation schlussfolgern wir ganz analog) auch $\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{P(u,v)} \neq 0$ ist.

Tatsächlich gilt $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}$.

■ Ebene Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\text{bzw.}$$
$$y = r\sin\varphi \qquad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi - (-r\sin^2\varphi) = r.$$

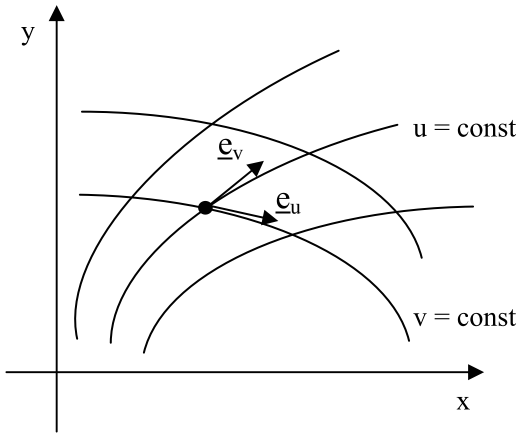
$$\frac{\partial(r,\varphi)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{r^3} - \left(-\frac{y^2}{r^3}\right) = \frac{x^2 + y^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

Wie erwartet, ist die Rücktransformation bis auf den Koordinatenursprung r = 0 eindeutig.

6.3 Nabla-Operator in krummlinigen Koordinaten

Wir betrachten wieder den zweidimensionalen Fall (Verallgemeinerung auf drei Dimensionen offensichtlich, s.u.):

$$\left.\begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array}\right\} \underline{r} = \underline{r}(u,v)$$



Halten wir v konstant und lassen u laufen, so zeigt die Ableitung $\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}$ in Richtung der Koordinatenlinie v = const. Dementsprechend ist $\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}$ tangential zur Koordinatenlinie u = const.

Aus den Tangentialvektoren bilden wir die normierten EHV an den Koordinatenlinien

$$\underline{e}_u := \frac{\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right|}, \quad \underline{e}_v := \frac{\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right|} \quad .$$

Der Abstand zwischen zwei infinitesimal benachbarten Punkten $\underline{r}$ und $\underline{r} + \underline{dr}$ mit den krummlinigen Koordinaten (u, v) und (u + du, v + dv) ist (Taylor-Entwicklung)

$$\underline{dr} = \underline{r}(u+du, v+dv) - \underline{r}(u,v) = \overbrace{\underline{r}(u+du, v+dv) - \underline{r}(u+du, v)}^{u+du=\text{const}} + \underbrace{\underline{r}(u+du, v) - \underline{r}(u,v)}_{v=\text{const}} \cong$$

$$\cong \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\,dv + \frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\,du = \underline{e}_v \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right| dv + \underline{e}_u \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right| du$$

$\underline{dr}$ lässt sich also aus zwei Teilvektoren zusammensetzen, die jeweils in die Richtung zeigen, in der sich nur ein Parameter ändert.

Das Quadrat der Länge von $\underline{dr}$, das sogenannte Linienelement, ist

$$(d\underline{r})^2 = g_{ij}\, du_i\, du_j \qquad \text{mit dem sogenannten metrischen Tensor (o.B.)} \qquad g_{ij} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_j} \ .$$

Um die Summenkonvention verwenden zu können, haben wir hier u durch u_1 und v durch u_2 ersetzt. Im räumlich dreidimensionalen Fall bleibt alles gültig, die dritte Koordinate w wird als u_3 bezeichnet.

Im Folgenden betrachten wir nur krummlinig-**orthogonale** Koordinaten, bei denen die Koordinatenlinien in jedem Punkt senkrecht aufeinander stehen, d.h.

$$\underline{e}_{u_i} \cdot \underline{e}_{u_j} = \delta_{ij}, \; g_{ij} = g_i^2\, \delta_{ij} \, .$$

Dann ist im von uns hier betrachteten ebenen Fall

$$(\underline{d}\underline{r})^2 = g_u^2\,(du)^2 + g_v^2\,(dv)^2$$

mit den **metrischen Koeffizienten**

$$g_u =: \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right| \text{ und } g_v =: \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right| .$$

■ Beispiele für krummlinig-orthogonale Koordinaten sind in 2d ebene Polarkoordinaten, in 3d sphärische Koordinaten.

Zur Bestimmung der Komponenten des Nabla-Operators in krummlinigen Koordinaten gehen wir von der koordinaten-unabhängigen Definition des Gradienten

$$d\phi(\underline{r}) = \operatorname{grad}\phi(\underline{r}) \cdot d\underline{r}$$

aus. Wählen wir $\underline{dr}$ entlang der Koordinatenlinie v = const, folgt für die Richtungsableitung in u Richtung

$$(\operatorname{grad}\phi)_u = \underline{e}_u \cdot \operatorname{grad}\phi = \frac{1}{g_u}\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \cdot \operatorname{grad}\phi = \frac{1}{g_u}\left(\overbrace{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial \phi}{\partial z}}_{\text{entfällt in 2d}}}^{\text{Skalarprodukt}}\right) \overbrace{=}^{\text{Kettenregel}} \frac{1}{g_u}\frac{\partial \phi}{\partial u}.$$

Beachte im letzten Schritt: $\phi(x,y,z) = \phi(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$.

Im Fall der Komponenten $(\operatorname{grad}\phi)_v$ und (in 3d) $(\operatorname{grad}\phi)_w$ gehen wir analog vor.

Fazit: In **krummlinig-orthogonalen Koordinaten** hat der Nabla-Operator <u>nicht</u> die Komponenten $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \underbrace{\frac{\partial}{\partial w}}_{\text{im 3D Fall}}$ (das würde nur gelten, wenn u,v,w kartesische Koordinaten wären), sondern es gilt

$$\underline{\nabla} = \left(\frac{1}{g_u}\frac{\partial}{\partial u}, \frac{1}{g_v}\frac{\partial}{\partial v}, \underbrace{\frac{1}{g_w}\frac{\partial}{\partial w}}_{\text{im 3d Fall}} \right)^T = \underline{e}_u \frac{1}{g_u}\frac{\partial}{\partial u} + \underline{e}_v \frac{1}{g_v}\frac{\partial}{\partial v} + \underbrace{\underline{e}_w \frac{1}{g_w}\frac{\partial}{\partial w}}_{\text{m 3d Fall}} .$$

Unbedingt beachten: Die EHV $\underline{e}_u$, $\underline{e}_v$ und $\underline{e}_w$ sind nicht ortsfest, sondern hängen von den Koordinaten u, v und w, also vom Ort ab!

In ähnlicher Weise werden die Differentialoperatoren div, rot und der Laplace-Operator in krummlinig orthogonalen Koordinaten bestimmt. Die sich ergebenden Ausdrücke findet man z.B. in Großmann, Kap. 7.2.

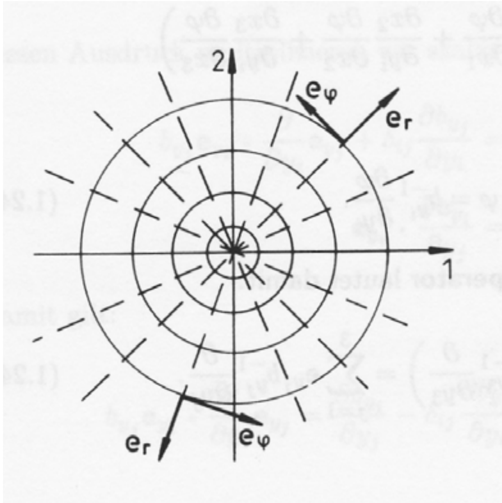
Wir werden vor allem die entsprechenden Ergebnisse im Fall der ebenen Polarkoordinaten sowie der Zylinder- und Kugelkoordinaten benötigen.

6.4 Ebene Polarkoordinaten

• <u>Transformation:</u>

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$



• <u>Koordinatenlinien</u>

$r = \text{const} \rightarrow$ konzentrische Kreise

$\varphi = \text{const} \rightarrow$ vom Ursprung ausgehende Geraden

• <u>EHV (Basis)</u>

- rein geometrisch erkennen wir leicht

$$\underline{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Der EHV $\underline{e}_r$ ist tangential zur Koordinatenlinie $\varphi = \text{const}$, der EHV $\underline{e}_\varphi$ tangential zu $r = \text{const}$ gerichtet; <u>beide sind nicht ortsfest</u>!

- "ausführlich"

$$\underline{e}_\varphi = \frac{\dfrac{\partial \underline{r}}{\partial\varphi}}{\left|\dfrac{\partial \underline{r}}{\partial\varphi}\right|} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \underline{r}}{\partial\varphi} = \dfrac{\partial(x\,\underline{e}_x + y\,\underline{e}_y)}{\partial\varphi} = \dfrac{\partial(r\cos\varphi\,\underline{e}_x + r\sin\varphi\,\underline{e}_y)}{\partial\varphi} = -r(\sin\varphi\,\underline{e}_x + \cos\varphi\,\underline{e}_y) = r\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left|\dfrac{\partial \underline{r}}{\partial\varphi}\right| = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)} = r \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Analog $\underline{e}_r = \dfrac{\partial \underline{r}}{\partial r}\left|\dfrac{\partial \underline{r}}{\partial r}\right|^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

$\underline{e}_r \cdot \underline{e}_\varphi = -\cos\varphi\sin\varphi + \cos\varphi\sin\varphi = 0$, ebene Polarkoordinaten sind krummlinig-<u>orthogonal.</u>

• <u>metrische Koeffizienten:</u> $g_r = 1$, $g_\varphi = r$

• <u>Nabla-Operator:</u> $\underline{\nabla} = \underline{e}_r \dfrac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\varphi \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$

Bemerkung: Die Verallgemeinerung auf Zylinderkoordinaten ist offensichtlich.