7. Integrale

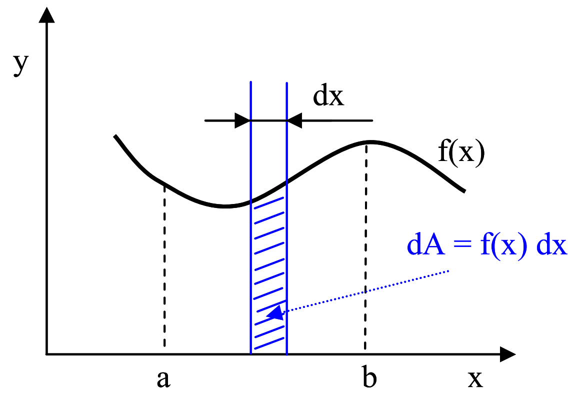
… sind, salopp formuliert, Summen unendlich vieler, geeignet gewählter unendlich kleiner (infinitesimaler) Beiträge …

7.1 Wdhlg.: Riemann-Integral über Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen

- Geometrische Interpretation des bestimmten Riemann-Integrals

$A = \int_a^b dx\, f(x) \to$ Fläche A wird begrenzt durch x-Achse, x = a, x = b und f(x).

A ist der Grenzwert $dx \to 0$ der Summe $\sum f(x)\,dx$ von infinitesimal schmalen Streifen der Fläche $dA = f(x)\cdot dx$.



Notation: x $\to$ Integrationsvariable, f(x) $\to$ Integrand, a und b $\to$ Integrationsgrenzen, $\int \to$ stilisiertes Summenzeichen. Unendlich viele unendlich kleine Beiträge werden addiert. Beachte: Flächenstücke unter der x-Achse zählen negativ.

- "Hauptsatz der Integralrechnung":

$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a)$, dabei ist F(x) die sogenannte **Stammfunktion** von f(x): $f(x) =: \dfrac{d\,F(x)}{dx}$.

Verändern wir die obere Grenze b, so ändert sich die betrachtete Fläche. Wir können dann das Integral $\int_a^b dx\, f(x)$ als Funktion der oberen Grenze auffassen. Analoge Betrachtungen gelten für die untere Grenze. Für das Integral als Funktion der oberen/unteren Grenze ist

$$\frac{d}{db}\left(\int_a^b dx\, f(x)\right) = f(b) \quad \frac{d}{da}\left(\int_a^b dx\, f(x)\right) = -f(a)\,.$$

Wird die obere (untere) Grenze beliebig groß (klein) können wir Grenzwerte der Form

$$\int_a^\infty dx\, f(x) := \lim_{b\to\infty} \int_a^b dx\, f(x)$$

betrachten; wir sprechen in diesen Fällen von *uneigentlichen* Integralen.

- Einige gängige Integrationsmethoden wiederholen:

(i) Variablensubstitution: $$\int_a^b dx\; f(x) \overset{x=x(t)}{=} \int_{t(a)}^{t(b)} dx\, \frac{dx}{dt} f\big(x(t)\big)$$

■ Kreisfläche: $A = 4\int_0^R dx\,\sqrt{R^2 - x^2}$

Substitution $x = R\sin\psi$ ergibt

$dx = R\cos\psi\; d\psi,\;\; x = 0 \to \psi = 0,\;\; x = R \to \sin\psi = 1,\; \psi = \frac{\pi}{2},$

also

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \;\; R\cos\psi \;\sqrt{R^2 - R^2\sin^2\psi} \;\; = 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \;\; \cos\psi \;\sqrt{1-\sin^2\psi} \;\; = 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \;\; \cos^2\psi = \pi R^2$$

denn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \;\; \cos^2\psi = \frac{\pi}{4}$, siehe **(ii)**.

Wählen wir die Substitution $x = R\cos\varphi$, dann ist

$$dx = -R\cos\varphi \; d\varphi, \;\; x = 0 \rightarrow \cos\varphi = 0, \; \varphi = \frac{\pi}{2}, \; x = R \rightarrow \cos\varphi = 1, \varphi = 0 \, ,$$

also

$$A = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi \; (-R\sin\varphi) \;\sqrt{R^2 - R^2\cos^2\varphi} \;\; = -\,4R^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi \;\; \sin^2\varphi = 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \;\; \sin^2\varphi = \pi R^2 ,$$

denn auch $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \;\; \sin^2\varphi = \frac{\pi}{4}$, siehe **(ii)**.

■ $\int dx \tan x = \int dx \frac{\sin x}{\cos x} = \int dx \frac{d}{dx}\left[-\ln(\cos x)\right] = -\ln(\cos x)$

(ii) partielle Integration: $\int u \; dv = u\,v - \int v \; du$

■ $\int d\varphi \cos^2\varphi =$

$$= \int d(\sin\varphi) \; \cos\varphi = \sin\varphi \; \cos\varphi - \int d\varphi \;\; \sin\varphi(-\sin\varphi) = \sin\varphi \; \cos\varphi + \int d\varphi \; (1-\cos^2\varphi)$$

Also ist

$$2\int d\varphi \cos^2\varphi = \sin\varphi \; \cos\varphi + \varphi$$

und damit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, \cos^2\varphi = \frac{\sin\varphi\,\cos\varphi + \varphi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Analog: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, \sin^2\varphi = \frac{\pi}{4}\,.$

(iii) Partialbruchzerlegung: Übung

(iv) Differenzieren nach einem Parameter

■ $\displaystyle I = \int_0^{\infty} dx\, x\, e^{-x} = 1$

Betrachte die Funktion $\displaystyle I(a) = \int_0^{\infty} dx\, x\, e^{-ax} = -\frac{d}{da}\left(\int_0^{\infty} dx\; e^{-ax}\right) = -\frac{d}{da}\left(-\frac{1}{a} e^{-ax}\Big|_0^{\infty}\right) = -\frac{d}{da}\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a^2}\,.$

Also ist $I = I(a=1) = 1$.

(v) Integrale in symmetrischen Grenzen

■ $$\int_{-a}^{a} dx\, f(x) = \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^{a} dx\, f(x), & \text{wenn } f(x) = f(-x) \text{ gerade} \\ 0, & \text{wenn } f(x) = -f(-x) \text{ ungerade} \end{cases}$$

(vi) Reihenentwicklung des Integranden

u.v.a.m.

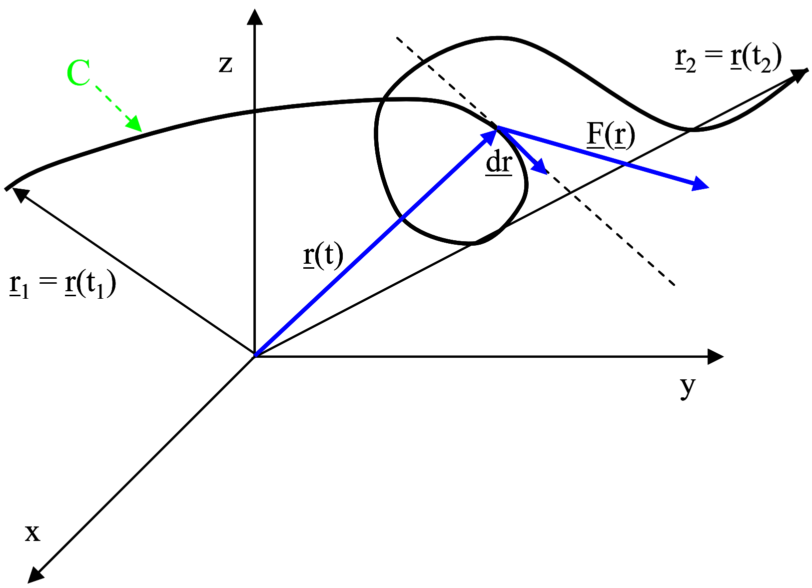
11.2 Kurvenintegrale

Beispiele für Kurvenintegrale sind

- die Länge einer Kurve $L = \int\limits_{1,C}^{2} ds$ oder
- die Arbeit bei gekrümmter Wegstrecke, $A = \int\limits_{1,C}^{2} d\underline{r} \cdot \underline{F}(\underline{r})$ (d.h. entlang einer Raumkurve C),
- die Bestimmung des Potenzials eines konservativen Kraftfelds $\underline{F}(\underline{r})$ aus $\phi(\underline{r}) = -\int d\underline{r} \cdot \underline{F}(\underline{r})$

(wegunabhängig).

Berechnung von $A = \int\limits_{1,C}^{2} d\underline{r} \cdot \underline{F}(\underline{r})$:



Die Größe A (z.B. die Arbeit) hängt ab vom Anfangs-und Endpunkt (1 bzw. 2), von der Raumkurve C und natürlich vom Feld $\underline{F}(\underline{r})$ (dem im Raumbereich wirkenden Kraftfeld) ab. Wir parametrisieren C durch Ortsvektoren $\underline{r}(t)$ ("Bahnkurve"), unterteilen C in Abschnitte der Länge $ds = |d\underline{r}|$, mit Anfangs- und End"zeit" t_1 bzw. t_2 , und summieren über die infinitesimalen Beiträge

$$A = \int\limits_{1,C}^{2} d\underline{r} \cdot \underline{F}(\underline{r}) = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{d\underline{r}}{dt} \cdot \underline{F}\big(\underline{r}(t)\big) = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, \underline{v}(t) \cdot \underline{F}\big(\underline{r}(t)\big)\ .$$

■ Umfang eines Kreises

1. Formulierung: $L = \int_{1,C}^{2} ds$

2. Kurve C parametrisieren $\underline{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$

3. t_1 und t_2 ausrechnen, ggf. aus $\underline{r}(t_1) = \underline{r}_1$, $\underline{r}(t_2) = \underline{r}_2$ ausrechnen — $t_1 = 0$, $t_1 = 2\pi$

4. $\dot{\underline{r}} = \underline{v}$, ggf. auch $v = |\underline{v}|$ bilden — $\underline{v}(t) = R \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, v = R$,

und Integral aufschreiben $L = \int_{0}^{2\pi} dt\ R$

5. $\underline{r}(t)$ in Integrand einsetzen — entfällt hier

6. ggf. Skalarprodukt ausführen — entfällt hier

7. gewöhnliches Integral ausführen — $L = 2\pi\ R$

$$L = \int_{1,C}^{2} |d\underline{r}| = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \frac{|d\underline{r}|}{dt} \overset{?}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \left|\frac{d\underline{r}}{dt}\right| = \int_{0}^{2\pi} dt\, |\underline{v}(t)| = \int_{0}^{2\pi} dt\ R$$

■ Gravitationspotenzial

A) Potenzialdifferenz zwischen $\underline{r}_0$ und $\underline{r}$

$$U(r) = -\int_{\underline{r}_0,C}^{\underline{r}} d\underline{r} \cdot \underline{F}(\underline{r}) = -\int_{\underline{r}_0,C}^{\underline{r}} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \gamma m M \int_{\underline{r}_0,C}^{\underline{r}} \frac{(x\,dx + y\,dy + z\,dz)}{r^3} =$$

$$= \gamma m M \left[\int_{x_0}^{x} \frac{x'\,dx'}{\left(x'^2 + y_0^2 + z_0^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \int_{y_0}^{y} \frac{y'\,dy'}{\left(x^2 + y'^2 + z_0^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \int_{z_0}^{z} \frac{z'\,dz'}{\left(x^2 + y^2 + z'^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right] =$$

$$= \gamma m M \left[-\frac{1}{\left(x^2 + \underset{\uparrow}{y_0^2} + z_0^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left(x^2 + \underset{\uparrow\uparrow}{y^2} + z_0^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\left(x^2 + \underset{\uparrow}{y_0^2} + z_0^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\left(x^2 + \underset{\uparrow\uparrow}{y^2} + z_0^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right] = \gamma m M \left[+ \frac{1}{\left(x^2 + y_0^2 + z_0^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right] = -\gamma m M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

B) Parametrisiere C durch Radialstrahl $\underline{r}(\lambda) = \lambda\,\underline{e}_r$

$$U(r) = -\int_C d\underline{r} \cdot \underline{F}(\underline{r}) = +\gamma\, m M \int_\infty^r \frac{d\lambda}{\lambda^2}\, \underline{e}_r \cdot \underline{e}_r = -\gamma\, m M \left.\frac{1}{\lambda}\right|_\infty^r = -\gamma\, \frac{mM}{r} \qquad \text{(anziehend !)}$$

→ potenzielle Energie von m im Punkt $\underline{r}$ ist gleich der zu verrichteten Arbeit, um m gegen das von M erzeugte Gravitationsfeld aus dem Unendlichen beginnend in $\underline{r}$ zu positionieren.

Beachte: Bei der Integration Symmetrien ausnutzen:

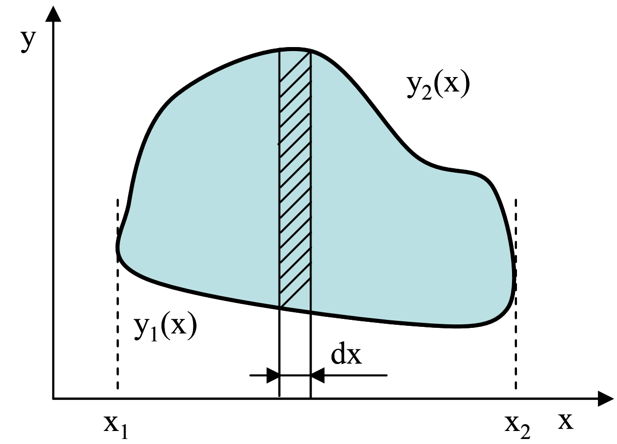
■ $\underline{E}$-Feld $\underline{E} = \alpha(-y,\, x,\, 0)$ Pfeile tangential an Kreisen um z-Achse gegen Uhrzeigersinn die mit wachsendem Abstand von z-Achse immer größer werden. Entlang eines kreisförmigen Weges (Radius des Kreises R) um die z-Achse gilt

- $\oint_c d\underline{r} \times \underline{E}(\underline{r}) = 0$ weil nur Beiträge gleich Null addiert werden.

- $\oint_c d\underline{r} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \oint_c ds\, E(\underline{r}) = E(R) \oint_c ds = \alpha R\; 2\pi R = \alpha\; 2\pi R^2$

11.2 Ebene Flächenintegrale

$$\int_F \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Flächen} \\ \text{element}}}{d^2r}\ \phi(x,y) = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\ \phi(x,y)}_{\text{Streifen }(x,\,x+dx)}$$

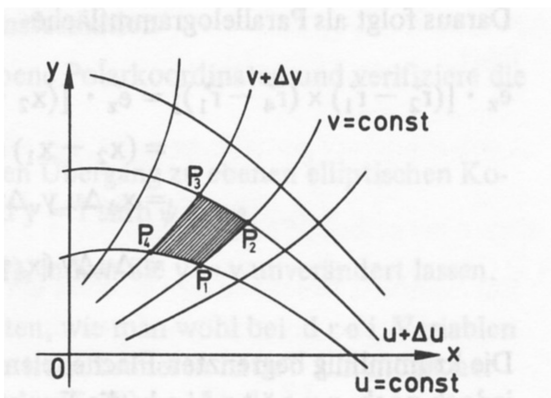


Bem.: - $d^2r \rightarrow$ Flächenelement: Die Zwei soll daran erinnern, dass es sich um etwas Flächenhaftes, Zweidimensionales handelt.

- Die Fläche sei zusammenhängend, $y_2(x)$ und $y_1(x)$ also eindeutig; wenn nicht, Fläche geeignet in Teilflächen zerlegen.

- **Transformation von Flächenelementen**

Die schraffierte Fläche ist für kleine $(\Delta u, \Delta v)$ näherungsweise ein Parallelogramm $P_1P_2P_3P_4$ dem Flächeninhalt



$$A = \underline{e}_z \cdot \left[(\underline{r}_2 - \underline{r}_1) \times (\underline{r}_4 - \underline{r}_1)\right] =$$

$$= \underline{e}_z \cdot \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(y_4 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_4 - x_1) \doteq$$

Wegen

$$x_2 = x(u+\Delta u, v) \cong x_1 + \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u \ , \quad y_2 = y(u+\Delta u, v) \cong y_1 + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u$$

$$x_4 = x(u, v+\Delta v) \cong x_1 + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v \ , \quad y_4 = y(u, v+\Delta v) \cong y_1 + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v$$

folgt

$$A \stackrel{\bullet}{=} \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v - \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v = \Delta u\, \Delta v \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \right) = \Delta u\, \Delta v \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \, .$$

Fazit: $\underline{dx\, dy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\, du\, dv}$ bzw. $\underline{\int dx\, dy\; f(x,y) = \int \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\, du\, dv\; f\big(x(u,v), y(u,v)\big)}$

Die krummlinig begrenzten Flächenelemente sind wie erwartet proportional zu dudv, der Proportionalitätsfaktor ist jedoch die Funktionaldeterminante genau an dem Punkt, an dem sich das Flächenelement befindet. Das ist die Verallgemeinerung der Substitutionsregel

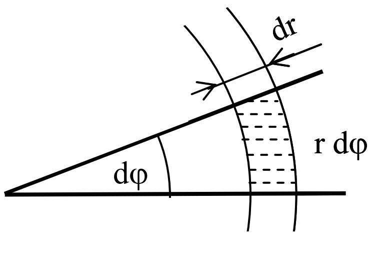
$$dx = \frac{dx}{du} du$$

für die Substitution $x = x(u)$ im eindimensionalen Fall.

Die Verallgemeinerung auf die Transformationsformel eines Volumenelements lautet

$$\underline{d^3 r = dx\, dy\, dz = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} du\, dv\, dw \, .}$$

■ Ebene Polarkoordinaten:



Es ist $dx\, dy = dr\;\; r d\varphi$ also $dx\, dy \neq dr\, d\varphi$. Die geometische Veranschaulichung zeigt das sofort, die Berechnung der Funktionaldeterminante bestätigt das Ergebnis.

■ Die Masse pro Fläche einer (als flächenhaft idealisierten) Galaxie nehme entsprechend

$$\rho(x,y) = \rho_0 \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)$$

exponentiell vom Zentrum weg ab. Um die Gesamtmasse M der Galaxie zu bestimmen, sind ebene Polarkoordinaten am geeignetsten

$$M = \int_F d^2r\ \rho(x,y) = \rho_0 \int_F d^2r\ \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{a^2}\right) = \left[\ \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)\ \right] =$$

$$\underset{\substack{x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi}}{=} \rho_0 \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \underbrace{\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}}_{r}\ e^{-\frac{r^2}{a^2}} = 2\pi\rho_0 \int_0^{\infty} dr\, r\, e^{-\frac{r^2}{a^2}} = 2\pi a^2 \rho_0 \int_0^{\infty} dz\, z\, e^{-z^2} =$$

$$= 2\pi a^2 \rho_0 \int_0^{\infty} dz \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{d}{dz}\left(e^{-z^2}\right) = 2\pi a^2 \rho_0 \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-z^2}\Big|_0^{\infty} = \pi a^2 \rho_0\ .$$

Bem.: Nützlich ist die in diesem Zusammenhang entstehende Beziehung

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \ e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \quad \text{denn} \quad I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy\ e^{-(x^2+y^2)} = 2\pi \int_0^{\infty} dr\ r\ e^{-r^2} = -\pi e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} = \pi\ .$$