1. Funktionen einer reellen Variablen

1.1 Grafische Darstellung im kartesischen Koordinatensystem

Eine Funktion y = f(x) lässt sich als Kurve im rechtwinkligen Koordinatensystem darstellen.

Einfache Änderungen des Funktionsverlaufs / Kurvenbilds der Funktion f(x):

f(-x) $\rightarrow$ spiegele f(x) an y-Achse

- f(x) $\rightarrow$ spiegele f(x) an x-Achse

- f(-x) $\rightarrow$ spiegele f(x) am Koordinatenursprung

f(x-a) $\rightarrow$ verschiebe f(x) um a nach rechts

f(x) + b $\rightarrow$ verschiebe f(x) um b nach oben

Die Funktion f(x) heißt gerade bzw. ungerade wenn $f(x) = f(-x)$ bzw. $f(x) = -f(-x)$ gilt. Die gerade Funktion ist symmetrisch bzgl. der y-Achse, die ungerade symmetrisch zum Koordinatenursprung.

Jede Funktion f(x) ist eindeutig als Summe aus einer geraden und einer ungeraden Funktion darstellbar

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\left[f(x) + f(-x)\right]}_{\text{gerade}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[f(x) - f(-x)\right]}_{\text{ungerade}} \; .$$

• <u>Umkehrfunktion, inverse Funktion</u>

Bei eineindeutiger Zuordnung der Elemente des Werte- und des Definitionsbereichs von $y = f(x)$ lässt sich x als Funktion $x = g(y)$ von y auffassen.

$x = g(y)$ ist die Umkehrfunktion von $y = f(x)$, oder die zu $y = f(x)$ inverse Funktion.

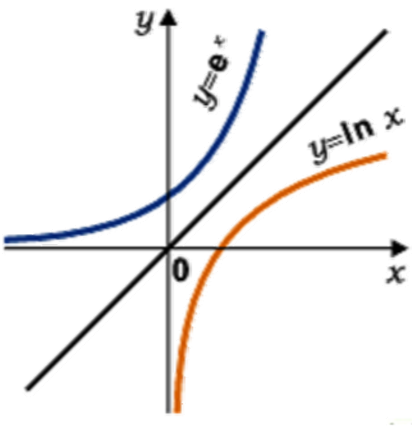
■ Aus $y = e^x$ wird $x = \ln y$.

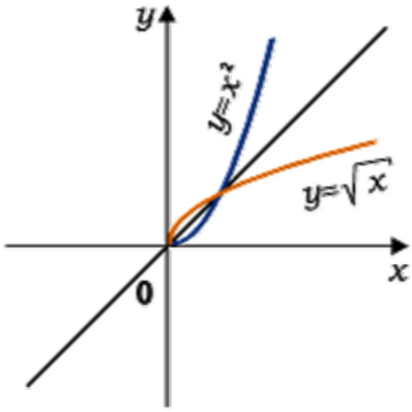
Die Logarithmusfunktion $x = \ln y$ ist invers zur Exponentialfunktion $y = e^x$. Es gilt $e^{\ln y} = y, \; \ln e^x = x$.

■ Im Fall der Funktion $y = x^2$ entsprechen einem y- zwei unterschiedliche x-Werte. Die beiden Äste der Parabel sind einzeln invertierbar

$$y = x^2 \quad \to \quad x = \sqrt{y} \text{ für } 0 \le x < \infty$$

$$y = x^2 \quad \to \quad x = -\sqrt{y} \text{ für } -\infty \le x < 0$$





AUFGABE: Typen elementarer Funktionen wiederholen (z.B. Bronstein, Kap. 2.2)

1.2 Stetigkeit einer Funktion

Die Funktion y = f(x) ist an der Stelle x = a stetig, wenn sie in der Umgebung von x = a sowie in x = a selbst definiert ist, und wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

existiert und gleich dem Funktionswert an der Stelle a ist. Anders ausgedrückt:

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon)$ so dass $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle x aus $|x - a| < \delta$.

Einseitige Stetigkeit. In x = a existieren nur rechts- oder linksseitiger Grenzwert, diese sind gleich dem Funktionswert:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a) \quad \text{oder} \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a).$$

Unstetigkeitsstellen einer Funktion, wie Polstellen, Sprünge usw., können verschiedenen Ursachen haben, z.B.

→ f(a) nicht definiert,

→ $f(a) \neq \lim\limits_{x \to a} f(x)$,

→ $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert nicht,

→ Funktionsverlauf ins Unendliche (Polstellen),

■ Gebrochen rationale Funktion $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, p(x) und q(x) Polynome, besitzen Polstellen bei x = a, wenn $p(a) \neq 0$, $q(a) = 0$. Verschwinden Zähler und Nenner gleichzeitig bei x = a, muss die Vielfachheit der Nullstelle des Nenners größer als die des Zählers sein.

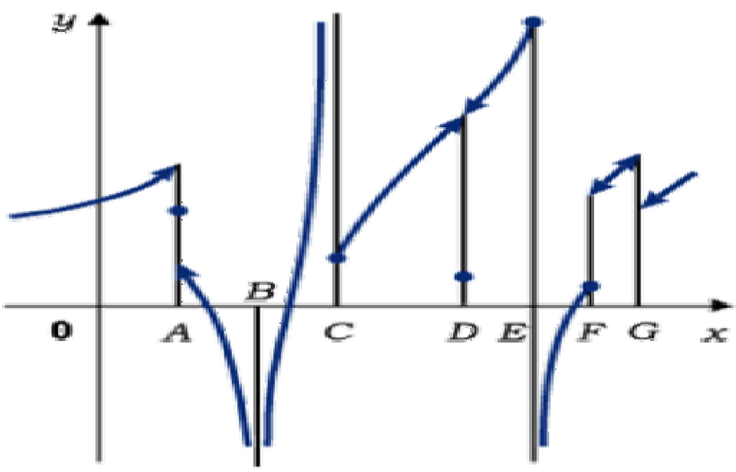
→ Sprung der Funktion f(x) beim Durchlaufen des Punktes x = a ,

■ $y = e^{\frac{1}{x-a}}$ besitzt einen unendlicher Sprung an der Stelle x = a, da

$$\lim_{x \to a-0} e^{\frac{1}{x-a}} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to a+0} e^{\frac{1}{x-a}} = \infty .$$

→ …

Häufig auftretende Arten von Unstetigkeiten vgl. Bronstein, Kap. 2.1.5.3:



1.3 Differenzierbarkeit von Funktionen. Ableitung einer Funktion y = f(x)

• Definition und Schreibweise: Ableitung an der Stelle x

$$y' \equiv \frac{df}{dx} \equiv f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon},$$

vorausgesetzt, der Grenzwert existiert. Anschauliche geometrische Bedeutung der Ableitung: Der Grenzwert $\varepsilon \to 0$ entspricht dem Übergang der Sekanten zwischen den Punkten $P_1 = (x + \varepsilon, f(x + \varepsilon))$ und $P = (x, f(x))$ in die Tangente an die Kurve f(x) im Punkt P. Es gilt $f'(x) = \tan\alpha$, wobei α der Tangentenneigungswinkel ist.

• <u>Differenzierbarkeit</u>: y = f(x) differenzierbar in x = a genau dann, wenn links- und rechtsseitiger Grenzwert des Differentialquotienten existieren und einander gleich sind.
Ist y = f(x) an der Stelle x = a differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.

Beispiele:

■ $$\frac{d}{dx} x^3 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[(x+\varepsilon)^3 - x^3 \right] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\varepsilon + 3x\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - x^3}{\varepsilon} = 3x^2$$

■ $$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{x+\varepsilon} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{x - (x+\varepsilon)}{\varepsilon(x+\varepsilon)x}\right] = -\frac{1}{x^2}$$

■ <u>"Produktregel"</u>

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\, g(x)\right] =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[f(x+\varepsilon)\, g(x+\varepsilon) \underbrace{- f(x) g(x+\varepsilon) + f(x)\, g(x+\varepsilon)}_{\text{"nahrhafte Null"}} - f(x)\, g(x) \right] \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\, g(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[f(x)\right] g(x) + f(x)\, \frac{d}{dx}\left[\, g(x)\right]$$

■ "Kettenregel"

usw.

• Unstetigkeit der Ableitung

■ $y = \sqrt[3]{x}$ in x = 0 nicht differenzierbar, da Grenzwert ∞ / Tangente $\perp$ zur x-Achse

■ $y = e^{|x-2|} = \begin{cases} e^{x-2}, & x \geq 2 \\ e^{2-x}, & x \leq 2 \end{cases}$

ist bei x = 2 stetig aber nicht differenzierbar, denn
rechts- und linksseitiger Grenzwert sind verschieden.

Ableitung: $y' = e^x e^2 = \begin{cases} e^x e^{-2}, & x > 2 \\ -e^{-x} e^2, & x < 2 \end{cases}$, $\quad y'(2 \pm 0) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

• Ableitung der inversen Funktion

$$y = f(x), \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = g(y), \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}$$

<u>Merkregel:</u> Differentialquotienten 1. Ordnung sind wie Brüche behandelbar.

■ $y = \cos x, \quad \frac{dy}{dx} = -\sin x \quad \overset{0 \leq x \leq \pi}{\leftrightarrow} \quad x = \arccos y, \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

• Ableitungen höherer Ordnung

zweite Ableitung $y'' = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} \equiv \frac{d^2y}{dx^2} \equiv \frac{d^2f}{dx^2} \equiv f''(x) \equiv f^{(2)}(x)$

n-te Ableitung $f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$

1.4 Approximation von Funktionen

• Potenzreihen

In der Physik werden Funktionen f(x) häufig durch Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

approximiert.

Ist f(x) beispielsweise die unbekannte Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung, kann man zur Lösung einen Potenzreihenansatz versuchen. Lassen sich die konstanten Koeffizienten a_n bestimmen und die Reihe konvergiert in einem x-Intervall, so stellt sie dort die gesuchte Funktion f(x) dar.
Offensichtlich enthalten Reihen gerader (ungerader) Funktionen nur gerade (ungerade) Potenzen.

■ $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, konvergiert für $|x| < 1$ (geometrische Reihe)

• Taylor-Reihe für unendlich oft differenzierbare Funktionen f(x)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)\Big|_{x=a} (x-a)^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n, \quad n! = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 1 \ \ (n-\text{Fakultät})$$

Geometrisch entspricht die Taylor-Reihe der Approximation einer Funktion durch Polynome

■ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$e^x = 1 + x + O(x^2) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$ usw. sind je nach geforderter Genauigkeit nützliche Approximationen für x << 1.

Weitere Beispiele:

- $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- aus $\frac{d}{dx}\left[-\ln(1-x)\right] = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$ folgt

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots \quad \text{bzw.} \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \ldots$$

- damit $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right)$ usw.

Die Entwicklung in eine Taylor-Reihe ist häufig nützlich bei der Bestimmung von Grenzwerten oder bei der Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von Funktionen:

- $$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{\varepsilon x} - 1}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(1 + \varepsilon x + \frac{\varepsilon^2 x^2}{2} + \ldots - 1\right) = x$$

- $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - x^3/3! \pm \ldots}{x} = \lim_{x \to 0}\left(1 - \frac{x^2}{3!} \pm \ldots\right) = 1$$

- $$\frac{1}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^2} \quad \text{für} \quad x \to \infty$$

Durch Entwicklung nach Potenzen von $1/x^2$ für $x >> 1$ findet man "genauer"

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+1/x^2} = \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \pm \ldots\right) = \frac{1}{x^2} + O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^4\right)$$

<u>Beachte:</u> Nicht jede Funktion kann überall in eine Taylor-Reihe entwickelt werden.

- Beispielsweise ist $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ an der Stelle x = 0 nicht durch eine Taylor-Reihe approximierbar, da Funktionswert und Ableitungen beliebiger Ordnung hier divergieren (wesentliche Singularität).

Fazit: Potenzreihen sind in der Physik nützlich um Funktionen zu approximieren. Wir werden später sehen, dass sie hilfreich bei der Lösung von Differential- oder Integralgleichungen und bei der Störungsrechnung sind.

■ **Beispiel: Relativistische Energie eines Teilchens** (A. Einstein, 1905)

$$E(v) = m(v)\,c^2 = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Gesucht wird die Reihenentwicklung nach Potenzen von $v^2/c^2 << 1$.

$$f(v) = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad f(0) = 1$$

$$f'(v) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\left(-\frac{2v}{c^2}\right) = \frac{v}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}, \text{ also } f'(0) = 0$$

$$f''(v) = \frac{1}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} + \frac{v}{c^2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-5/2}\left(-\frac{2v}{c^2}\right) = \frac{1}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} + 3\frac{v^2}{c^4}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-5/2}, \text{ also } f''(0) = \frac{1}{c^2}$$

usw. Wir finden

$$E = m c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\ldots\right) = \underbrace{m c^2}_{\substack{\text{Ruheenergie}\\ \text{Masse} \leftrightarrow \text{Energie}}} + \underbrace{\frac{m}{2}v^2}_{\text{nichtrelat. kin. Energie}} + \underbrace{\frac{3}{8}m v^2\frac{v^2}{c^2}}_{\text{1. relat. Korrektur}} + \ldots \qquad (\square)$$

■ Anderer Lösungsweg: Betrachte

$$f(x) = (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \ldots, \text{ konvergiert für } |x| < 1.$$

Für natürliche Zahlen n = 1, 2, … ist das die Binomische Reihe. Die Taylor-Entwicklung

$$f(x) = (1+x)^n\ , f(0) = 1$$
$$f'(x) = n(1+x)^{n-1}\ , f'(0) = n$$
$$f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}\ , f''(0) = n(n-1)$$

zeigt die allgemeinere Gültigkeit. Im vorliegenden Fall ist $x = -\frac{v^2}{c^2}, |x| << 1,\ n = -\frac{1}{2}$, also

$$\left[1+\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)\right]^{-1/2} = 1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^2+\ldots = 1+\frac{v^2}{2c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\ldots$$

wie oben (□).