Prof. Dr. Harald Engel
Dr. Julia Kabuß, Dipl. Phys. Maria Zeitz, Robert Kohlhaas BSc, Hagen-Henrik Kowalski, Alexander Ziepke

8. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Bis Do. 19.06.2014 8h25 vor Beginn der Vorlesung im EW 201 oder im Briefkasten am Hintereingang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 19 (Mündlich): *Koordinatentransformation*

Stellen Sie die folgenden skalaren Felder in Kugel und Zylinderkoordinaten dar. Gibt es besonders geeignete Koordinaten?

(a) $\Phi(\underline{r}) = -\frac{\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ (Graviationspotential in 3-D)

(b) $\Phi(\underline{r}) = -\gamma \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ (Analogon zum Newton'schen Potential in 2-D)

(c) $\Phi(\underline{r}) = x$

(d) $\Phi(\underline{r}) = \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2}$

(e) Transformieren Sie außerdem das folgende Vektorpotential in Zylinderkoordinaten. Legen Sie dazu die Richtung von $\underline{B}$ zweckmäßig.

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{1}{2}\underline{B} \times \underline{r}$$

γ, a und b seien konstante Skalare, $\underline{B}$ sei ein konstanter Vektor.

Aufgabe 20 (20 Punkte): *Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten*

(a) Schreiben Sie die Koordinatentransformation zwischen kartesischen Koordinaten (x, y, z) und Kugelkoordinaten (r, φ, ϑ) in beiden Richtungen.

(b) Beschreiben Sie die durch Konstantsetzen jeweils einer der neuen Koordinaten r, φ, ϑ erhaltenen Hyperflächen. Bestimmen Sie die neuen Einheitsvektoren $\underline{e}_r, \underline{e}_\varphi, \underline{e}_\vartheta$ sowie deren Ableitungen $\partial_i \underline{e}_j$ $(i, j = r, \varphi, \vartheta)$. Zeigen Sie deren Orthonormalität.

(c) Zeigen Sie, dass der Nabla-Operator $\underline{\nabla}$ in den neuen Koordinaten zu $\underline{\nabla} = \underline{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \underline{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$ wird (Siehe VL), d.h. bestimmen Sie die Differentialoperatoren D_i in $\underline{\nabla} = \underline{e}_r D_r + \underline{e}_\varphi D_\varphi + \underline{e}_\vartheta D_\vartheta$. Wie sieht der Laplace-Operator $\Delta = \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla}$ in den neuen Koordinaten aus?

(d) Gegeben sei ein Vektorfeld $\underline{a} = a_r \underline{e}_r + a_\vartheta \underline{e}_\vartheta + a_\varphi \underline{e}_\varphi$ Berechnen Sie mithilfe von $\underline{\nabla}$ aus (c) die Divergenz $\underline{\nabla} \cdot \underline{a}$.

(e) Berechnen Sie mithilfe von (c) die Rotation $\underline{\nabla} \times \underline{a}$.

Tipp: Benutzen Sie die partiellen Ableitungen der Einheitsvektoren nach den Koordinaten r, φ und ϑ aus (b) und ersetzen Sie.

Vorlesung:
- Donnerstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201.

Webseite:
- Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss_2014/pflichtveranstaltungen_-_bachelorstudium/mm130/

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Mindestens 50% Teilnahme an mündlichen Aufgaben.
- Mindestens 1x Vorrechnen.
- Bestandene Klausur.

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur handschriftliche Originale akzeptiert. Keine Kopien oder elektronischen Abgaben.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Siegfried Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik
- Hermann Schulz: Physik mit Bleistift - Das analytische Handwerkszeug der Naturwissenschaftler
- I. N. Bronstein: Taschenbuch der Mathematik