Prof. Dr. Harald Engel
Dr. Julia Kabuß, Dipl. Phys. Maria Zeitz, Robert Kohlhaas BSc, Hagen-Henrik Kowalski BSc, Alexander Ziepke

1. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Bis Mi. 30.04.2014 18:00 im Briefkasten am Hintereingang des ER-Gebäudes
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 1 (8 Punkte): *Ableitung*
Bilden Sie die ersten Ableitungen folgender Funktionen:
(i) $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, (ii) $f(x) = \mathrm{e}^{bx}$, (iii) $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$, (iv) $f(x) = \tanh(x)$, (v) $f(x) = \ln(x)$ und (vi) $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$
Skizzieren Sie jeweils die Funktion und deren Ableitung.
Wählen Sie für die Skizzen $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -4, a_3 = 0, a_4 = 2, a_i = 0 \; \forall \; i \geq 5$ und $b = 3$
(v) und (vi) mündlich

Aufgabe 2 (6 Punkte): *Taylorentwicklung: Taylor-Reihen und Taylorpolynome*

a) In der VL wurde die Potenzreihenentwicklung in einer Taylor-Reihe für unendlich oft differenzierbare Funktionen $f(x)$ eingeführt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{1}$$

Leiten Sie mithilfe von Gleichung (1) die Taylor-Reihen der Funktionen (i) $f(x) = e^x$, (ii) $f(x) = \sin(x)$ und (iii) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ $(x > -1)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ab.
Hinweis: Der Beweis mit vollständiger Induktion gibt jeweils einen Zusatzpunkt.

b) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte unter Verwendung der Reihendarstellungen von Punkt 2a):

$$\text{(i)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{e^x + e^{-x} - 2} \tag{2}$$

c) Berechnen Sie das Taylorpolynom der Funktion: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ bis zur Ordnung $f_2(x) + O(x^3)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

d) **Mündlich** Die Funktion $f(x) = e^x$ genügt der Funktionalgleichung:

$$f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 + x_2). \tag{3}$$

Beweisen Sie dies unter Verwendung der Potenzreihendarstellung von Aufgabe 2a).
Tipp: Benutzen Sie den binomischen Satz: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$, *wobei* $\binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Bitte Rückseite beachten!$\longrightarrow$

Aufgabe 3 (6 Punkte): *Springbrunnen*

Alle Wassertropfen mögen mit der gleichen Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter verschiedenen Winkeln α, $0 < \alpha < \pi$ im Zentrum des Springbrunnens austreten. Wir nehmen an, die Bahnkurven der Tropfen seien unter Verwendung kartesischer Koordinaten (Ursprung im Zentrum des Springbrunnens) parametrisch gegeben durch ($t_0 = 0$)

$$\begin{aligned} x(t) &= (v_0 \cos\alpha)t, \\ y(t) &= (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

wobei g die Erdbeschleunigung bedeutet.

a) Wie lautet die (x,y)-Gleichung der Bahnkurve? Eliminieren Sie t.

b) Skizzieren Sie Bahnkurven für die Werte $\alpha = \frac{n}{8}\pi$ für die Werte $n = 1, ..., 7$. Benutzen Sie dafür $v_0 = 10$ m/s und $g = 9.81$ m/s^2. Woran erinnert Sie das Bild?

c) Bestimmen Sie die Scheitelpunkte (x_S, y_S) (die jeweils höchsten Punkte der Bahnkurve) in Abhängigkeit von α. Bei welchem Winkel α fliegen die Wassertropfen am höchsten und welche maximale Höhe wird erreicht?

d) **Mündlich** Wie lauten die positiven Nullstellen $(x_N, 0)$ der Kurve? Für welche α ist x_N maximal? Wie groß muss man den Brunnen also mindestens bauen, damit (bei Windstille) alle Tropfen aufgefangen werden?

Vorlesung:	• Donnerstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201.
Webseite:	• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss_2014/pflichtveranstaltungen_-_bachelorstudium/mm130/
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. • Mindestens 50% Teilnahme an mündlichen Aufgaben. • Mindestens 1x Vorrechnen. • Bestandene Klausur.

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur handschriftliche Originale akzeptiert. Keine Kopien oder elektronischen Abgaben.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Siegfried Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik
- Hermann Schulz: Physik mit Bleistift - Das analytische Handwerkszeug der Naturwissenschaftler
- I. N. Bronstein: Taschenbuch der Mathematik