Prof. Dr. Harald Engel
Dr. Julia Kabuß, Dipl. Phys. Maria Zeitz, Robert Kohlhaas BSc, Hagen-Henrik Kowalski, Alexander Ziepke

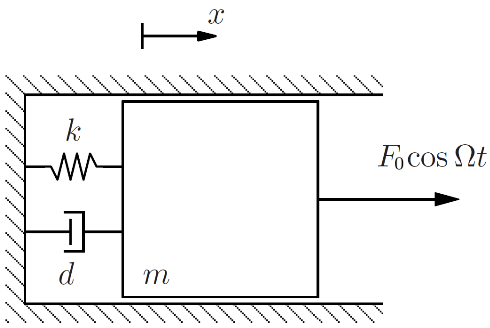
11. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Bis Do. 10.07.2014 8h25 vor Beginn der Vorlesung im EW 201 oder im Briefkasten am Hintereingang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 28 (12 Punkte): *Erzwungene Schwingungen mit Dämpfung*

Gegeben sei ein gedämpfter Einmassenschwinger (Masse m, Federkonstante k, Dämpfung d), der mit einer periodischen Kraft $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ angetrieben wird. Die Bewegungsgleichung für die Auslenkung $x(t)$ ist gegeben durch



$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t \ ,$$

mit $\delta = \frac{d}{2m}$ und $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

(a) Lösen Sie die **homogene Gleichung** zur Bewegungsgleichung. (*Tipp*: Ermitteln Sie mithilfe des Ansatzes $x_\mathsf{h}(t) = e^{\lambda t}$ das charakteristische Polynom.)

(b) Zeigen Sie, dass sich für den Fall schwacher Dämpfung, sprich $\delta^2 < \omega_0^2$, die Lösung in der Form $x_\mathsf{h}(t) = e^{-\delta t}(A \cos \omega_* t + B \sin \omega_* t)$ schreiben lässt und geben Sie ω_* an.

(c) Verwenden Sie die Anfangsbedingungen $x(t = 0) = 0$ und $\dot{x}(t = 0) = v_0$, um die Konstanten A und B zu eliminieren und zeichnen Sie qualitativ $x_\mathsf{h}(t)$.

(d) Bestimmen Sie nun auch die **inhomogene Lösung** $x_\mathsf{inh}(t)$ mithilfe der Methode der Variation der Konstanten.

(e) Geben Sie die **allgemeine Lösung** $x(t) = x_\mathsf{h}(t) + x_\mathsf{inh}(t)$ an. Plotten (z.B. mit Mathematica) und diskutieren Sie $x(t)$ für eine schwache Dämpfung mit den Zahlenwerten $\delta = 0.5$ und $\omega_0 = 20$. Das System soll angetrieben werden mit einer Kreisfrequenz $\Omega = 1$. Setzen Sie weiterhin $v_0 = 20$. Wählen Sie einen sinnvollen Zeitbereich, etwa $0 \leq t \leq 10$.

Aufgabe 29 (0 Punkte): *Ebenes Pendel* **Mündlich**

Betrachten Sie ein Fadenpendel der Länge l mit einem Massenpunkt der Masse m unter dem Einfluss der Schwerkraft $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_z$. Das Pendel schwinge in der (x,z)-Ebene, so dass durch die Newton'sche Bewegungsgleichung folgende Vektorielle Gleichung gegeben ist.

$$m\underline{\ddot{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -m \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \qquad (1)$$

(a) Skizzieren Sie das System und tragen Sie die Kraft $\underline{F}$ in die Skizze ein.

(b) Bestimmen Sie mithilfe von (1) und unter Benutzung von ebenen Polarkoordinaten die Bewegungsgleichung für die Winkelvariable $\varphi(t)$ der Auslenkung.

(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen aus (b) im Grenzfall kleiner Auslenkungen aus der Ruhelage mit einem Exponentialansatz und geben Sie die allgemeine Lösung an. (*Tipp*: Machen Sie

Prof. Dr. Harald Engel
Dr. Julia Kabuß, Dipl. Phys. Maria Zeitz, Robert Kohlhaas BSc, Hagen-Henrik Kowalski, Alexander Ziepke

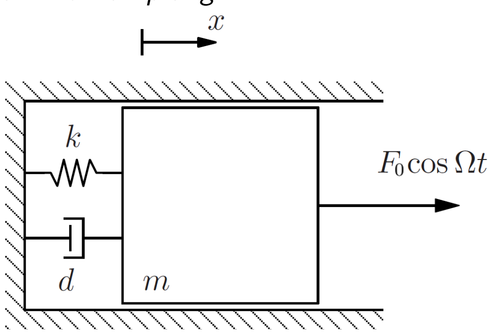
11. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Bis Do. 10.07.2014 8h25 vor Beginn der Vorlesung im EW 201 oder im Briefkasten am Hintereingang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 28 (12 Punkte): *Erzwungene Schwingungen mit Dämpfung*

Gegeben sei ein gedämpfter Einmassenschwinger (Masse m, Federkonstante k, Dämpfung d), der mit einer periodischen Kraft $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ angetrieben wird. Die Bewegungsgleichung für die Auslenkung $x(t)$ ist gegeben durch



$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t \,,$$

mit $\delta = \frac{d}{2m}$ und $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

(a) Lösen Sie die **homogene Gleichung** zur Bewegungsgleichung. (*Tipp*: Ermitteln Sie mithilfe des Ansatzes $x_\mathsf{h}(t) = e^{\lambda t}$ das charakteristische Polynom.)

(b) Zeigen Sie, dass sich für den Fall schwacher Dämpfung, sprich $\delta^2 < \omega_0^2$, die Lösung in der Form $x_\mathsf{h}(t) = e^{-\delta t}(A \cos \omega_* t + B \sin \omega_* t)$ schreiben lässt und geben Sie ω_* an.

(c) Verwenden Sie die Anfangsbedingungen $x(t = 0) = 0$ und $\dot{x}(t = 0) = v_0$, um die Konstanten A und B zu eliminieren und zeichnen Sie qualitativ $x_\mathsf{h}(t)$.

(d) Bestimmen Sie nun auch die **inhomogene Lösung** $x_\mathsf{inh}(t)$ mithilfe der Methode der Variation der Konstanten.

(e) Geben Sie die **allgemeine Lösung** $x(t) = x_\mathsf{h}(t) + x_\mathsf{inh}(t)$ an. Plotten (z.B. mit Mathematica) und diskutieren Sie $x(t)$ für eine schwache Dämpfung mit den Zahlenwerten $\delta = 0.5$ und $\omega_0 = 20$. Das System soll angetrieben werden mit einer Kreisfrequenz $\Omega = 1$. Setzen Sie weiterhin $v_0 = 20$. Wählen Sie einen sinnvollen Zeitbereich, etwa $0 \leq t \leq 10$.

Aufgabe 29 (0 Punkte): *Ebenes Pendel* **Mündlich**

Betrachten Sie ein Fadenpendel der Länge l mit einem Massenpunkt der Masse m unter dem Einfluss der Schwerkraft $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_z$. Das Pendel schwinge in der (x,z)-Ebene, so dass durch die Newton'sche Bewegungsgleichung folgende Vektorielle Gleichung gegeben ist.

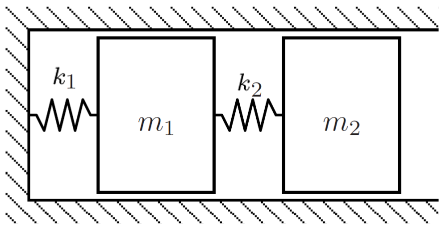
$$m\underline{\ddot{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -m \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \tag{1}$$

(a) Skizzieren Sie das System und tragen Sie die Kraft $\underline{F}$ in die Skizze ein.

(b) Bestimmen Sie mithilfe von (1) und unter Benutzung von ebenen Polarkoordinaten die Bewegungsgleichung für die Winkelvariable $\varphi(t)$ der Auslenkung.

(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen aus (b) im Grenzfall kleiner Auslenkungen aus der Ruhelage mit einem Exponentialansatz und geben Sie die allgemeine Lösung an. (*Tipp*: Machen Sie dazu eine Taylor-Entwicklung der entsprechenden trigonometrischen Funktion um den Entwicklungspunkt $\varphi_0 = 0$.) Wie lautet die spezielle Lösung für die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \varphi_a$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$? Wie groß ist die Periodendauer T des Pendels?

Aufgabe 30 (8 Punkte): *Gekoppelte Schwingungen*
Skizziert ist ein System aus zwei schwingenden Massen. Die Bewegungsgleichungen für die Auslenkungen x_1 und x_2 sind gegeben durch



$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -(k_1+k_2)x_1 + k_2 x_2 \;, \\ m_2\ddot{x}_2 &= k_2 x_1 - k_2 x_2 \;. \end{aligned}$$

Dies ist ein gekoppeltes System linearer homogener Differentialgleichungen.

(a) Schreiben Sie das Differentialgleichungssystem in Matrixform $\underline{\ddot{x}} = \underline{\underline{M}}\;\underline{x}$ mit $\underline{x} = (x_1, x_2)^T$. Verwenden Sie $k_1 = 2k, k_2 = k, m_1 = 2m, m_2 = m$.

(b) Zeigen Sie, dass Sie mit dem Ansatz $\underline{x} = \underline{c}e^{\lambda t}$ ein Eigenwertproblem erhalten und berechnen Sie die Eigenwerte(Eigenfrequenzen) und Eigenvektoren der Matrix $\underline{\underline{M}}$. Interpretieren Sie die beiden Eigenschwingungen physikalisch. Geben Sie den Lösungsvektor $\underline{x}(t)$ an.

Vorlesung:
- Donnerstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201.

Webseite:
- Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss_2014/pflichtveranstaltungen_-_bachelorstudium/mm130/

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Mindestens 50% Teilnahme an mündlichen Aufgaben.
- Mindestens 1x Vorrechnen.
- Bestandene Klausur.

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur handschriftliche Originale akzeptiert. Keine Kopien oder elektronischen Abgaben.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

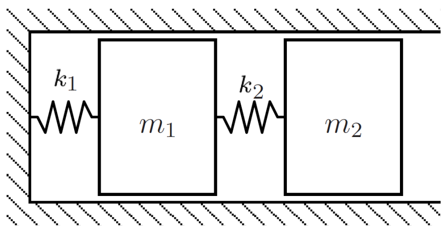
- Siegfried Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik
- Hermann Schulz: Physik mit Bleistift - Das analytische Handwerkszeug der Naturwissenschaftler
- I. N. Bronstein: Taschenbuch der Mathematik

dazu eine Taylor-Entwicklung der entsprechenden trigonometrischen Funktion um den Entwicklungspunkt $\varphi_0 = 0$.) Wie lautet die spezielle Lösung für die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \varphi_a$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$? Wie groß ist die Periodendauer T des Pendels?

Aufgabe 30 (8 Punkte): *Gekoppelte Schwingungen*

Skizziert ist ein System aus zwei schwingenden Massen. Die Bewegungsgleichungen für die Auslenkungen x_1 und x_2 sind gegeben durch

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -(k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2 \ , \\ m_2 \ddot{x}_2 &= k_2 x_1 - k_2 x_2 \ . \end{aligned}$$



Dies ist ein gekoppeltes System linearer homogener Differentialgleichungen.

(a) Schreiben Sie das Differentialgleichungssystem in Matrixform $\underline{\ddot{x}} = \underline{\underline{M}}\ \underline{x}$ mit $\underline{x} = (x_1, x_2)^T$. Verwenden Sie $k_1 = 2k, k_2 = k, m_1 = 2m, m_2 = m$.

(b) Zeigen Sie, dass Sie mit dem Ansatz $\underline{x} = \underline{c} e^{\lambda t}$ ein Eigenwertproblem erhalten und berechnen Sie die Eigenwerte(Eigenfrequenzen) und Eigenvektoren der Matrix $\underline{\underline{M}}$. Interpretieren Sie die beiden Eigenschwingungen physikalisch. Geben Sie den Lösungsvektor $\underline{x}(t)$ an.

Vorlesung:
- Donnerstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201.

Webseite:
- Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss_2014/pflichtveranstaltungen_-_bachelorstudium/mm130/

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Mindestens 50% Teilnahme an mündlichen Aufgaben.
- Mindestens 1x Vorrechnen.
- Bestandene Klausur.

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur handschriftliche Originale akzeptiert. Keine Kopien oder elektronischen Abgaben.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Siegfried Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik
- Hermann Schulz: Physik mit Bleistift - Das analytische Handwerkszeug der Naturwissenschaftler
- I. N. Bronstein: Taschenbuch der Mathematik