

Prof. Dr. Harald Engel
 Dr. Julia Kabuß, Dipl. Phys. Maria Zeitz, Robert Kohlhaas BSc, Hagen-Henrik Kowalski, Alexander Ziepke

5. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Bis Mi. 28.05.2014 18h im Briefkasten am Hintereingang des ER-Gebäudes
 Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 11 (Mündlich): Ebene Bewegung in Polarkoordinaten

Die Bewegung eines Teilchens sei durch den Vektor

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r(t) \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \end{pmatrix}$$

beschrieben.

- a) Drücken Sie die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$, deren Betrag $v = |\dot{\mathbf{r}}|$ und die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}$ durch \dot{r} , \ddot{r} , $\dot{\varphi}$ und $\ddot{\varphi}$ aus.
- b) Betrachten Sie die ortsabhängige Basis

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und zeigen Sie dass gilt

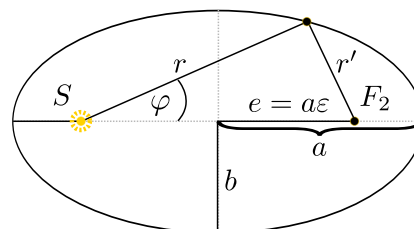
$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi, \quad \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi$$

- c) Zeigen Sie außerdem, dass im Falle von $r = \text{const.}$ die Geschwindigkeit senkrecht auf dem Ortsvektor steht.

Aufgabe 12 (15 Punkte): Kepler'sche Gesetze und Gravitationsgesetz

Aus den Kepler'schen Gesetzen I und II für die Planetenbewegung (Siehe VL) soll hier das Newton'sche Gravitationsgesetz abgeleitet werden.

Nach dem I. Kepler'schen Gesetz bewegen sich die Bahnen der Planeten auf Ellipsen, mit der Sonne in einem Brennpunkt [Siehe Skizze]. Die Ellipse E , auf der sich die Planeten bewegen, kann als Menge aller Punkte mit $E := \{P, |r + r' = 2a\}$ angegeben werden.



- (a) Eliminieren Sie r' aus der Ellipsenbedingung $r + r' = 2a$ und geben Sie den Abstand des Planeten zur Sonne r als Funktion der Winkels φ , des Bahnparameters $p = \frac{b^2}{a}$ und der Exzentrizität ε an.
- (b) Formulieren Sie die Bahnkurve $\mathbf{r}(t) = (x(r, \varphi), y(r, \varphi), z(r, \varphi))^T$ mithilfe des Winkels φ und des Abstandes r aus (a). Berechnen Sie daraus die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ sowie den Drehimpuls $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$, wobei m die Planetenmasse ist.

5. Übung SS14

- (c) Berechnen Sie die Beschleunigung $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$. Benutzen Sie, dass nach dem II. Kepler'schen Gesetz $mr^2\dot{\varphi} = \text{const}$ gilt. Geben Sie nun mithilfe der Newton'schen Bewegungsgleichung $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ das Gravitationsgesetz an und diskutieren Sie das Ergebnis.

Vorlesung:

- Donnerstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201.

Webseite:

- Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss.2014/pflichtveranstaltungen-_bachelorstudium/mm130/

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Mindestens 50% Teilnahme an mündlichen Aufgaben.
- Mindestens 1x Vorrechnen.
- Bestandene Klausur.

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur handschriftliche Originale akzeptiert. Keine Kopien oder elektronischen Abgaben.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Siegfried Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik
- Hermann Schulz: Physik mit Bleistift - Das analytische Handwerkszeug der Naturwissenschaftler
- I. N. Bronstein: Taschenbuch der Mathematik