Prof. Dr. Harald Engel
Dr. Julia Kabuß, Dipl. Phys. Maria Zeitz, Robert Kohlhaas BSc, Hagen-Henrik Kowalski, Alexander Ziepke

4. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Bis Do. 22.05.2014 vor Beginn der Vorlesung im EW 201/ im Briefkasten am Hintereingang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 8 (4 Punkte): *Matrizen und Determinanten*

Gegeben seien die Matrizen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie folgende Produkte: i) $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$, ii) $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$ und iii) **Mündlich** $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{C}}$.

(b) Berechnen Sie i) $\mathrm{Det}(A)$ und A^{-1}, ii) **Mündlich** $\mathrm{Det}(B)$ und B^{-1}.

Aufgabe 9 (4 Punkte): *Pauli-Matrizen*

Gegeben seien die Pauli-Matrizen ($\mathrm{i}^2 = -1$)

$$\underline{\underline{\sigma}}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\sigma}}_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\sigma}}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diese stellen in der Quantenmechanik die Wirkung der Spin-Operatoren auf Spin-1/2-Zustände, beispielsweise auf Elektronen, dar.

(a) Zeigen Sie die Relation

$$\underline{\underline{\sigma}}_i \underline{\underline{\sigma}}_j = \delta_{ij} \underline{\underline{1}} + \mathrm{i}\, \varepsilon_{ijk} \underline{\underline{\sigma}}_k\,, \quad i, j \in \{x, y, z\}\,.$$

Wobei das sogenannte Kronecker-Delta definiert sei durch

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und ε_{ijk} das in der Aufgabe 10 definierte Levi-Civita Symbol sei.

(b) Ob in der Quantenmechanik zwei Observablen (z.B. Energien, Impulse, Spin-Komponenten) zugehörig zu zwei Operatoren gleichzeitig scharf gemessen werden können, ist durch einen verschwindenden Kommutator gegeben. Der Kommutator von zwei Matrizen $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}$ ist definiert als

$$[\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}] = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}.$$

Zeigen Sie, dass für den Kommutator der Paulischen Spin-Matrizen gilt: $[\underline{\underline{\sigma}}_i, \underline{\underline{\sigma}}_j] = 2\mathrm{i}\, \epsilon_{ijk} \underline{\underline{\sigma}}_k$ für $i, j \in \{x, y, z\}$.

Bitte Rückseite beachten!⟶

4. Übung SS14

Aufgabe 10 (7 Punkte): *Levi-Civita-Symbol und Kreuzprodukt*

Das Levi-Civita-Symbol sei gegeben durch

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (ijk) \text{ gerade Permutation von } (123) \\ -1 & \text{falls } (ijk) \text{ ungerade Permutation von } (123) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie folgende Relationen

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn} \tag{2}$$

$$\textbf{Mündlich: } \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6 \tag{3}$$

b) Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt für die Komponenten des Kreuzproduktes $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ die Beziehung $a_i = \varepsilon_{ijk} b_j c_k$. Zeigen Sie mittels dieser Definition und der obigen Relationen folgende Identitäten:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \tag{4}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \tag{5}$$

$$\textbf{Mündlich: } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \tag{6}$$

Hinweis: Es gilt die Einsteinsche Summenkonvention (Über doppelt auftretende Indizes von 1 bis 3 wird summiert).

Vorlesung:
- Donnerstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 201.

Webseite:
- Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss_2014/pflichtveranstaltungen_-_bachelorstudium/mm130/

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Mindestens 50% Teilnahme an mündlichen Aufgaben.
- Mindestens 1x Vorrechnen.
- Bestandene Klausur.

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur handschriftliche Originale akzeptiert. Keine Kopien oder elektronischen Abgaben.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Siegfried Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik
- Hermann Schulz: Physik mit Bleistift - Das analytische Handwerkszeug der Naturwissenschaftler
- I. N. Bronstein: Taschenbuch der Mathematik