Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 30. April 2014

Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
Mathias Hayn, Judith Lehnert, Andrea Vüllings, Samuel Brem, Zeynep Cetinkaya

3. Übungsblatt – Quantenmechanik I

Abgabe: Mo. 12. Mai 2014 bis 10:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 6 (10.5+3.5+2=16 Punkte): *Kastenpotential mit endlich hohen Wänden*
Gegeben sei ein Potential $V(x)$ durch

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 \quad , & -L < x < L \\ 0 \quad , & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da hier nur gebundene Zustände betrachtet werden, ist $-V_0 < E < 0$. Die folgenden Abkürzungen sollten verwendet werden:

$$\kappa^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{und} \quad k^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2} \, .$$

(a) Lösen Sie für diesen Fall die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung durch geeignete Ansätze für die drei Bereiche des Potentials. Benutzen Sie die Rand- und Stetigkeitsbedingungen zur Reduzierung der auftretenden Konstanten. Behandeln Sie dabei symmetrische und antisymmetrische Lösungen getrennt. Zeigen Sie, dass zur Bestimmung der Energie die transzendenten Gleichungen

$$\begin{aligned} \kappa &= k\tan(kL) \qquad &\text{(symmetrische Lösung)} \\ \kappa &= -k\cot(kL) \qquad &\text{(antisymmetrische Lösung)} \end{aligned}$$

zu erfüllen sind und geben Sie die (normierten) Wellenfunktionen an.

(b) Die in 1(a) auftretenden Gleichungen lassen sich analytisch nicht lösen. Grafisch kann man jedoch Aussagen über Anzahl und Größe der Energieeigenwerte in Abhängigkeit von der Tiefe V_0 und der Breite des Kastens machen. Bestimmen Sie die (diskreten) Energieeigenwerte E_n für den Fall $mV_0L^2 \longrightarrow \infty$. Zeigen Sie zunächst, dass gilt:

$$k = \frac{(2n+1)\pi}{2L} \qquad \text{(symmetrische Lösung)}$$
$$k = \frac{n\pi}{L} \qquad \text{(antisymmetrische Lösung)}$$

wobei $n = 1, 2, \ldots$.

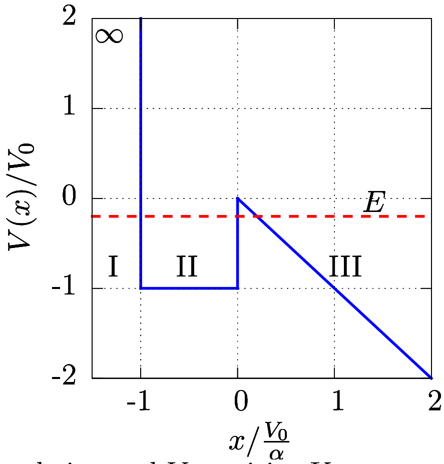
Hinweis: Sie erhalten eine zusätzliche Gleichung zur Bestimmung von k und κ, indem Sie $(kL)^2 + (\kappa L)^2$ betrachten.

(c) In einem endlichen Potentialtopf erhalten Sie endlich viele diskrete Energien. Bestimmen Sie die Anzahl dieser Energien für symmetrische und antisymmetrische Zustände in Abhängigkeit der oben berechneten Größe $(kL)^2 + (\kappa L)^2$. (Betrachten Sie dabei den allgemeinen Fall, also nicht den unter b) behandelte Grenzfall $mV_0L^2 \longrightarrow \infty$.)

3. Übung TPII SS2014

Aufgabe 7 (1+1+4=6 Punkte): *Tunneleffekt in einer Halbleiter-Heterostruktur*

Im Folgenden soll eine heterostructure hot-electrode diode betrachtet werden. Dabei handelt es sich um ein Halbleiterbauelement aus einer GaAs- und einer AlGaAs-Schicht. Ein sehr einfaches, reskaliertes Modell für dieses System wird durch das folgende Potential beschrieben:



$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{if } x \leq \frac{-V_0}{\alpha} \\ -V_0 & \text{if } \frac{-V_0}{\alpha} < x < 0 \\ -\alpha x & \text{if } x > 0, \end{cases}$$

wobei α und V_0 positive Konstanten sind. Bei $x = 0$ grenzen die beiden Schichten aneinander. Für die Energie gelte $E < 0$.

(a) Stellen Sie die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung in allen 3 Gebieten auf.

(b) Machen Sie einen Ansatz für die Wellenfunktion Ψ in den Gebieten I und II.

(c) Die zwei unabhängigen Lösungen im Gebiet III sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} \Psi_a(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x+E/\alpha)} e^{-i\frac{\hbar^2}{6m\alpha}k^3} \mathrm{d}k \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos[k(x+E/\alpha) - \frac{\hbar^2}{6m\alpha}k^3] \mathrm{d}k \\ \Psi_b(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{\hbar^2}{6m\alpha}k^3 - (x+E/\alpha)k\right] + \sin\left[\frac{\hbar^2}{6m\alpha}k^3 - (x+E/\alpha)k\right] \right\} \mathrm{d}k. \end{aligned}$$

Leiten Sie die Lösung $\Psi_a(x)$ her, indem Sie die Schrödinger-Gleichung im Gebiet III Fouriertransformieren. Dies führt Sie zu einer Differentialgleichung für die Fouriertransformierte $\tilde{\Psi}_a(k)$ von $\Psi_a(x)$. Lösen Sie diese Differentialgleichung und transformieren Sie dann zurück in den Ortsraum, um $\Psi_a(x)$ zu erhalten. (Die Lösung $\Psi_b(x)$ erhält man nicht durch Fouriertransformation, weil $\Psi_b(x)$ für $x \to \infty$ gegen unendlich geht und deshalb nicht Fouriertransformierbar ist. Man kann diese Lösung zum Beispiel durch einen Potenzreihenansatz erhalten, was hier aber nicht gefordert wird.)