Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 21. Mai 2014

Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
Mathias Hayn, Judith Lehnert, Andrea Vüllings, Samuel Brem, Alejandro Torres Orjuela

6. Übungsblatt – Quantenmechanik I

Abgabe: Mo. 2. Juni 2014 bis 10:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 12 (1+2.5+5.5=9 Punkte): *Matrixdarstellung von Operatoren und Basiswechsel*
Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zwei Operatoren mit vollständigen, orthonormierten Eigensystemen $\{|a_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $\{|b_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ und nichtentarteten Eigenwerten α_n und β_n.

(a) $|\psi\rangle$ sei in der $\hat{A}$-Darstellung gegeben, d.h. $|\psi\rangle = \sum_n a_n|a_n\rangle$ wobei gilt $a_n = \langle a_n|\psi\rangle$. Welche Form hat $|\psi\rangle$ in der $\hat{B}$-Darstellung? Bestimmen Sie also $b_n = \langle b_n|\psi\rangle$ als Funktion der Koeffizienten a_n und der Basisvektoren $\{|b_n\rangle\}$ und $\{|a_n\rangle\}$.

(b) Welche Form hat der Operator $\hat{A}$ in der $\hat{A}$- und in der $\hat{B}$-Darstellung, d.h. wie sieht der Vektor $\hat{A}\,|\psi\rangle$ in der jeweiligen Darstellung aus, wenn $|\psi\rangle$ in eben dieser Darstellung gegeben ist?

(c) Seien $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$. Der Vektor $|\psi_A\rangle = 5\,|-1\rangle + 3\,|1\rangle = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ sei in der $\hat{A}$-Darstellung gegeben, wobei $|-1\rangle$ der Eigenvektor zum Eigenwert -1 und $|1\rangle$ der Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist. Berechnen Sie $|\psi_A\rangle$ in der $\hat{B}$-Darstellung und den Operator $\hat{A}$ in beiden Darstellungen.

Aufgabe 13 (2+2+2+2=8 Punkte): *Rechnen mit Operatoren*

Es seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zwei beschränkte Operatoren. Zeigen Sie folgende Behauptungen unter der Bedingung, dass $\big[[\hat{A},\hat{B}],\hat{A}\big] = \big[[\hat{A},\hat{B}],\hat{B}\big] = 0$ gilt:

(a) $\big[\hat{A}^n,\hat{B}\big] = n\big[\hat{A},\hat{B}\big]\hat{A}^{n-1}$

(b) $\mathrm{e}^{\hat{A}}\hat{B} = \big(\hat{B} + [\hat{A},\hat{B}]\big)\mathrm{e}^{\hat{A}}$

(c) $\mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}} = \mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{\hat{B}}\mathrm{e}^{-[\hat{A},\hat{B}]/2}$

(d) $\mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{\hat{B}} = \mathrm{e}^{\hat{B}}\mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{[\hat{A},\hat{B}]}$

Hinweis: Die Exponentialfunktion ist definiert durch $\mathrm{e}^{\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\hat{A}^n}{n!}$. Betrachten Sie in Punkt (c) die Funktionen $f(t) = \mathrm{e}^{t(\hat{A}+\hat{B})}$ und $g(t) = \mathrm{e}^{t\hat{A}}\mathrm{e}^{t\hat{B}}\mathrm{e}^{-t^2[\hat{A},\hat{B}]/2}$. Zeigen Sie, dass diese Funktionen der gleichen linearen DGL zu gleichen Anfangswerten gehorchen (unter Ausnutzung von Punkt (a)). Analog für Punkt (d) mit den Funktionen $f(t) = \mathrm{e}^{t\hat{A}}\mathrm{e}^{\hat{B}}$ und $g(t) = \mathrm{e}^{\hat{B}}\mathrm{e}^{t\hat{A}}\mathrm{e}^{[t\hat{A},\hat{B}]}$.

Aufgabe 14 (1+3+1+2=7 Punkte): *Wechselwirkung im Pöschl-Teller-Potential*
Der Hamilton-Operator $\hat{H}_0$, der zur eindimensionalen „Pöschl-Teller-Potentialmulde" der Form $V(x) = -U_0/\cosh^2(\alpha x)$ aus Aufgabe 5 gehört, hatte für $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}kg$, $\alpha = 10^9 m^{-1}$ und $U_0 = s(s+1)(\alpha\hbar)^2/2m_e$ und $s \in \mathbb{N}$, s Eigenzustände $|\psi_i^0\rangle$ negativer Energie E_i^0 $(i = 0, 1, \ldots, s-1)$.
Die beiden niedrigsten Niveaus dieses Systems seien nun in folgender Art gestört: Die Energie des niedrigsten Niveaus sei durch ein äußeres Feld um $W > 0$ angehoben und ein inneres Störfeld der Stärke $V > 0$ bewirke einen Übergang von $|\psi_0^0\rangle$ nach $|\psi_1^0\rangle$ und umgekehrt. Der Hamilton-Operator dieses Systems sei $\hat{H} := \hat{H}_0 + \hat{H}_1$, wobei sich der Störterm $\hat{H}_1$ in Dirac-Schreibweise durch

$$\hat{H}_1 = W|\psi_0^0\rangle\langle\psi_0^0| + V\big(|\psi_0^0\rangle\langle\psi_1^0| + |\psi_1^0\rangle\langle\psi_0^0|\big)$$

ausdrücken lässt.

(a) Zeigen Sie, dass die Zustände $|\psi_i^0\rangle$ für $i > 1$ weiterhin Energieeigenzustände zu den Energien E_i^0 sind. Die Störung kann also als Problem auf dem zweidimensionalen Unterraum $\mathcal{H}_s = \mathrm{span}\{|\psi_0^0\rangle, |\psi_1^0\rangle\}$ betrachtet werden (Zwei-Niveau-System).

(b) Lösen Sie das auf $\mathcal{H}_s$ eingeschränkte Eigenwertproblem:

$$\hat{H}|\psi_i\rangle = E_i|\psi_i\rangle \quad i = 0, 1 \quad ,$$

indem Sie die gestörten Eigenzustände nach den ungestörten entwickeln.
Hinweis: Der Hamilton-Operator kann in der Basis der ungestörten Zustände als 2×2-Matrix geschrieben werden. Das Eigenwertproblem darf auch mit Hilfe des Computers gelöst werden.

(c) Zeigen Sie: Für $V = 0$ „überholt " der Eigenwert E_0 den Eigenwert E_1 bei $W = W_c$ (*level-crossing*). Für $V > 0$ findet dieser Effekt nicht statt und es gilt $E_0 < E_1$.

(d) Stellen Sie beide Situationen aus Aufgabenteil (c) grafisch dar. Wählen Sie dazu $s = 3$, d.h. $E_0^0 = -9(\hbar\alpha)^2/2m_e$ und $E_1^0 = -4(\hbar\alpha)^2/2m_e$, sowie $V = 0$ und $V = (\hbar\alpha)^2/m_e$.

(e) (2 Zusatzpunkte) Zeigen Sie, dass der Störterm $\hat{H}_1$ in der Ortsdarstellung nicht die Form eines üblichen (multiplikativen) Potentials $\hat{H}_1\psi(x) = V_1(x)\psi(x)$ hat, sondern durch einen sogenannten Integraloperator $\hat{H}_1\psi(x) = \int K(x,x')\psi(x')dx'$ mit *Integralkern* $K(x,x')$ gegeben ist (nichtlokales Potential).