Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
Mathias Hayn, Judith Lehnert, Andrea Vüllings, Samuel Brem, Alejandro Torres

9. Übungsblatt – Quantenmechanik I

Abgabe: Mo. 23. Juni 2014 bis 10:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 20 (1+1+1+1=4 Punkte): *Harmonischer Oszillator in Matrixdarstellung*
Wir verwenden die Eigenzustände $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{b}^\dagger)^n|0\rangle$ des Teilchenzahloperators $\hat{N} = \hat{b}^\dagger\hat{b}$ als Basisvektoren des Hilbert-Raums:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad \dots$$

Berechnen Sie die Matrixdarstellung:

(a) des Erzeugungsoperators $\hat{b}^\dagger$,

(b) des Vernichtungsoperators $\hat{b}$,

(c) des Ortsoperators $\hat{x}$, des Impulsoperators $\hat{p}$

(d) und des Hamilton-Operators $\hat{H}$

in dieser Basis.

Aufgabe 21 (2+4+2=8 Punkte): *Drehimpulsoperatoren*

(a) Zeigen Sie $\langle l,m|\hat{L}_i|l,m\rangle = 0$ für $i = 1,2$, wobei $|l,m\rangle$ der gemeinsame Eigenzustand von $\hat{L}^2$ und $\hat{L}_3$ ist.
Hinweis: Stellen Sie dafür $\hat{L}_1$ und $\hat{L}_2$ als Funktionen von $\hat{L}_+$ und $\hat{L}_-$ dar.

(b) Berechnen Sie $(\Delta\hat{L}_i)^2 = \langle l,m|(\hat{L}_i - \langle\hat{L}_i\rangle)^2|l,m\rangle$ für $i = 1,2,3$, wobei $\langle\hat{L}_i\rangle = \langle l,m|\hat{L}_i|l,m\rangle$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\Delta\hat{L}_1$ und $\Delta\hat{L}_2$ minimal sind, wenn $|m| = l$ gilt.

Aufgabe 22 (2+1+4+3+3=13 Punkte): *Landau-Niveaus, Teil A*
Ein freies Teilchen der Ladung $e > 0$ und Masse m befinde sich im homogenen Magnetfeld $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$.
Quantenmechanisch wird das Teilchen durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\mathbf{p}} - e\hat{\mathbf{A}})^2 = \frac{1}{2m}(\hat{p}^2 - e\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{A}} - e\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{p}} + e^2\hat{A}^2) = \frac{1}{2m}[-\hbar^2\Delta - e\frac{\hbar}{i}(\nabla\hat{\mathbf{A}} + 2\hat{\mathbf{A}}\ \nabla) + e^2\hat{A}^2]$$

beschrieben, wobei $\hat{\mathbf{A}}$ das Vektorpotential ist. $\hat{p}$ und $\hat{A}$ sind die Beträge von $\hat{\mathbf{p}}$ bzw. $\hat{\mathbf{A}}$.

(a) Zeigen Sie, dass die klassische Trajektorie einem Kreis mit Mittelpunkt (x_0, y_0) entspricht, wobei x_0 und y_0 Integrationskonstanten sind. Zur Erinnerung: Klassisch wirkt die Lorentz-Kraft $\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, wobei $\mathbf{v}$ die Geschwindigkeit ist.

(b) Wählen Sie für das Vektorpotential die Eichung $\hat{\mathbf{A}} = -B\hat{y}\mathbf{e}_x$ und zeigen Sie, dass dann eine gemeinsame Basis aus Eigenfunktionen von $\hat{H}$, $\hat{p}_x$ und $\hat{p}_z$ existiert.

(c) Berechnen Sie die Energieeigenwerte und -funktionen der Schrödinger-Gleichung in der Ortsdarstellung unter Verwendung kartesischer Koordinaten. **Hinweis:** Verwenden Sie zur Lösung einen Seperationsansatz: $\Psi(x, y, z) = f(x)g(y)h(z)$. Bestimmen Sie $f(x)$ als Lösungen der Eigenwertgleichung von $\hat{p}_x$, d.h. von

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}f(x) = \hbar k_x f(x).$$

Bestimmen Sie analog $h(z)$ als Lösung der Eigenwertgleichung von $\hat{p}_z$. Stellen Sie dann die Eigenwertgleichung für $g(y)$ auf. Das Ergebnis sollte die Schrödinger-Gleichung eines um $y_0 = -\frac{\hbar k_x}{eB}$ verschobenen harmonischen Oszillators sein. Sie können die Lösung ohne größere Rechnung angeben.

(d) Bestimmen Sie die Erwartungswerte der kanonischen Impulse $\hat{p}_x$, $\hat{p}_y$ und $\hat{p}_z$ sowie des kinetischen Impulses $\hat{p}_x - e\hat{A}_x$ im gerade berechneten Eigenzustand von $\hat{H}$

(e) Zeigen Sie, dass $\hat{y}_0 \equiv -\hat{p}_x/(eB)$ und $\hat{x}_0 \equiv \hat{p}_y/(eB) + \hat{x}$ diejenigen Operatoren sind, die den Mittelpunktskoordinaten der klassischen Kreisbewegung senkrecht zum Magnetfeld entsprechen. Berechnen Sie $[\hat{H}, \hat{y}_0]$, $[\hat{H}, \hat{x}_0]$ und $[\hat{y}_0, \hat{x}_0]$.

Aufgabe 23 (2+4+4=10 Punkte): ***Bonusaufgabe:*** *Landau-Niveaus, Teil B*

Wir betrachten weiterhin das Teilchen aus Aufgabe 20, wählen aber nun die Eichung $\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{r}}$.

(a) Zeigen Sie, dass es dann eine gemeinsame Basis aus Eigenfunktionen von $\hat{H}$, $\hat{p}_z$ und $\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$ gibt. Verwenden Sie Zylinderkoordinaten.

(b) Bestimmen Sie nun die Eigenwerte und -funktionen der Schrödinger-Gleichung. Verwenden Sie dafür erneut einen Seperationsansatz: $\Psi(r, \varphi, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$ und bestimmen Sie $\Phi(\varphi)$ als Eigenfunktion von $\hat{L}_z$ und $Z(z)$ als Eigenfunktion von $\hat{p}_z$. Machen Sie für den radialen Anteil der Eigenfunktionen den folgenden Ansatz $R(r) = e^{-\alpha\frac{r^2}{2}}r^{|\tilde{m}|}w(r)$, wobei $\hbar\tilde{m}$, $\tilde{m} \in \mathbb{Z}$, der Eigenwert von $\hat{L}_z$ ist. Sie sollten dabei die folgende Differentialgleichung für w erhalten:

$$w'' + \Big(\frac{2|\tilde{m}| + 1}{r} - 2\alpha r\Big)w' + [\beta - 2\alpha(|\tilde{m}| + 1)]w = 0$$

mit $\alpha = \frac{eB}{2\hbar}$ und $\beta = \frac{2m}{\hbar^2}E - k_z^2 + \frac{eB}{\hbar}\tilde{m}$. Lösen Sie diese Differentialgleichung durch einen Potenzreihenansatz.

(c) Welche Werte kann die z-Komponente des Drehimpulses L_z bei fester Gesamtenergie E und gegebenem Impuls p_z annehmen? Welche Werte von L_z sind bei der klassischen Bewegung erlaubt?