Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

12. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe/Vorrechnen: Mi. 09.07.2014 zu Beginn der Übung

S **Aufgabe 38 (6 Punkte):** *Zeitskalen der Brownschen Bewegung*

(a) Die eindimensionalen Langevingleichung für die Geschwindigkeit $\dot{x}(t) = v(t)$ lautet

$$m\ddot{x}(t) = -\gamma \dot{x}(t) + \Gamma(t) , \tag{8.1}$$

mit der Anfangsbedingung $v(0) = v_0$. Zeigen Sie durch Variation der Konstanten, dass die Partikulärlösung der Inhomogenität gegeben ist durch

$$v_{\text{inhom}} = \frac{1}{m} \int_0^t dt' \;\; \Gamma(t')\, e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t')} .$$

und berechnen Sie die allgemeine Lösung.

(b) Berechnen Sie auch eine allgemeine Lösung für den Ort $x(t)$, wenn das Probeteilchen bei x_0 startet. Nutzen Sie dafür

$$\int_0^t dt'' \int_0^{t''} dt' \;\; \Gamma(t')\, e^{-\frac{\gamma}{m}(t''-t')} = \frac{m}{\gamma} \int_0^t dt' \;\; \Gamma(t') \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t')}\right) .$$

(c) Berechnen Sie die zeitliche Entwicklung der mittleren quadratischen Abweichung des Ortes $\left\langle (x(t) - x_0)^2 \right\rangle$, skizzieren Sie diese und betrachten Sie die Grenzfälle

1. $t \gg \frac{m}{\gamma}$,
2. $t \ll \frac{m}{\gamma}$.

Verwenden Sie

$$\begin{aligned} \langle \Gamma(t) \rangle &= 0 , \\ \left\langle \Gamma(t)\Gamma(t') \right\rangle &= 2\gamma k_B T \; \delta(t - t') . \end{aligned}$$

(d)
1. Wie lässt sich dieses Verhalten (nach einem kurzen bzw. langen Zeitraum) physikalisch erklären? Gehen Sie in ihrer Antwort (in zwei Sätzen!) auf die mikroskopischen Vorgänge ein, die in der Brownschen Dynamik relevant sind.
2. Was ist in der mathematischen Beschreibung der wesentliche Unterschied zwischen einer Brownschen und ballistischen Bewegung? Berechnen Sie zur Beantwortung dieser Frage (in einem Satz!) die mittlere quadratische Abweichung des Ortes eines gleichförmig bewegten Massepunktes.

M **Aufgabe 39**: *Einstein Diffusion*

Die Fokker-Planck Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\mathbf{r}, t)$ eines Brownschen Teilchens in einer viskosen Flüssigkeit lautet

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{r}, t) - D\nabla^2 p(\mathbf{r}, t) = 0 .$$

Diese *Einsteinsche Diffusionsgleichung* mit Diffusionskonstante D besitzt in N Dimensionen die Greensche Funktion für ein unendliches Volumen (vgl. Aufgabe 16)

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t - t_0) = \frac{1}{(4\pi D(t - t_0))^{N/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2}{4D(t - t_0)} \right] .$$

Bestimmen Sie für den eindimensionalen Fall $p(x,t)$ unter der Annahme, dass sich das Teilchen mit Sicherheit zur Zeit t_0 am Ort $x_0 > 0$ aufhielt, für $t > t_0$. Dabei sollen zwei Fälle unterschieden werden:

(a) Reflektierende Randbedingungen:
Der Transport des Teilchens ist durch eine reflektierende Wand auf den Halbraum $x > 0$ beschränkt. Dabei sollen die Randbedingungen $\partial_x p(x=0,t)$=0 und $p(x \to \infty, t)$=0 gelten.

(b) Absorbierende Randbedingungen:
Das Teilchen verschwindet aus dem Halbraum, sobald es die Wand bei $x = 0$ erreicht und kann nicht mehr zurückkehren. Damit ergeben sich die Randbedingungen $p(x=0,t)$=0 und $p(x \to \infty, t)$=0.

Hinweis: Verwenden Sie die Spiegel-Methode.

M **Aufgabe 40**: *Fluktuations-Dissipations-Theorem für die Diffusionsgleichung*
Betrachten Sie eine Diffusionsgleichung mit gegebenem äußerem Feld $K(\mathbf{r},t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{r},t) - D\nabla^2 p(\mathbf{r},t) = K(\mathbf{r},t) \ .$$

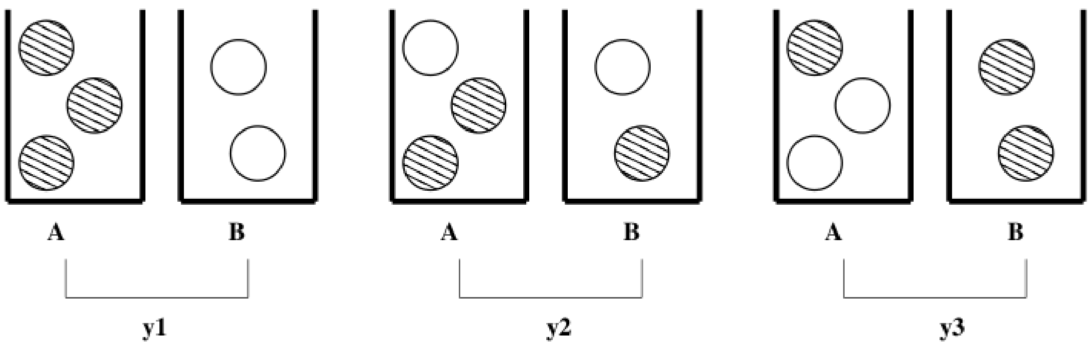
(a) Die Antwortfunktion $\chi(\mathbf{k},\omega) = \chi'(\mathbf{k},\omega) + i\chi''(\mathbf{k},\omega)$ sei definiert über

$$\tilde{p}(\mathbf{k},\omega) = \chi(\mathbf{k},\omega)\tilde{K}(\mathbf{k},\omega) \ .$$

Berechnen Sie $\chi'(\mathbf{k},\omega)$ und $\chi''(\mathbf{k},\omega)$.

(b) Verwenden Sie das Fluktuations-Dissipations-Theorem um die Fouriertransformierte $C(\mathbf{k},\omega)$ der Autokorrelationsfunktion von $p(\mathbf{x},t)$ zu berechnen.

S **Aufgabe 41 (4 Punkte):** *Markov Prozess*
Betrachten Sie zwei Töpfe A und B, in denen drei rote und zwei weiße Bälle derart verteilt sind, dass A stets drei und B stets zwei Bälle enthält. Es gibt, wie unten dargestellt, drei verschiedene Konfigurationen y_i mit $i = 1,2,3$, die auseinander hervorgehen, wenn man zufällig jeweils einen Ball aus den Töpfen A und B zieht und miteinander vertauscht. Bestimmen Sie die $3\times3-$ Matrix



$\mathbf{Q}$ der Übergangswahrscheinlichkeiten, mit den Einträgen

$$Q_{i,j} = P\left(y_i, s \,|\, y_j, s{+}1\right)$$

welche die bedingten Wahrscheinlichkeiten angeben, dass das System bei einem Kugeltausch von Konfiguration y_i zur Zeit s zu y_j zur Zeit $s+1$ wechselt.
Bestimmen Sie $\mathbf{Q}^\infty = \lim_{N\to\infty} \mathbf{Q}^N$, wenden Sie $\mathbf{Q}^\infty$ auf verschiedene Anfangszustände (bezüglich der Basis y_i) an und interpretieren Sie das Ergebnis.