Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

# 2. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

**Abgabe/Vorrechnen: Mi. 30.04.2014 zu Beginn der Übung**

**S Aufgabe 4 (8 Punkte):** *Konvektionsformel und Charakteristische Linien*

(a) Geben Sie ein eindimensionales Geschwindigkeitsfeld an, dessen materielle Beschleunigung null ist und dessen konvektive Ableitung nicht verschwindet. Interpretieren Sie nun allgemein die konvektive Beschleunigung $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$: In welche Richtung weist die konvektive Beschleunigung bei konstantem Betrag eines Geschwindigkeitsfeldes? Was geschieht, wenn das Geschwindigkeitsfeld zusätzlich auch noch wirbelfrei ist?

(b) Skizzieren Sie die angegebenen Geschwindigkeitsfelder und bestimmen Sie die *Bahnlinie* $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t)$, sowie Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\boldsymbol{\xi},t)$ und Beschleunigung $\mathbf{a}(\boldsymbol{\xi},t)$ des materiellen Punktes $\boldsymbol{\xi}$.

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} kx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{k}{1+t/t_0}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; k,t,t_0 \geq 0 \,.$$

(c) *Stromlinien* sind definiert als die Feldlinien des momentanen Geschwindigkeitsfeldes. Die Differentialgleichung für die Stromlinie $\mathbf{r}(\lambda)$ lautet:

$$\frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} = \mathbf{v}(\mathbf{r}(\lambda),t)|_{t=const.} \,.$$

Zeigen Sie ganz allgemein, dass diese Bedingung zur Berechnung der Stromlinien äquivalent zu der Bedingung

$$\frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} \times \mathbf{v}(\mathbf{r}(\lambda),t)|_{t=const.} = 0$$

ist. Berechnen Sie die Stromlinien von $\mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$. Welche Beziehung besteht zwischen den Stromlinien und den Bahnlinien der Geschwindigkeitsfelder?

**S Aufgabe 5 (2 Punkte):** *Tornado*

Das Geschwindigkeitsfeld in einem Tornado kann in Zylinderkoordinaten durch folgende Beziehung angenähert werden:

$$\mathbf{v} = -\frac{a}{r}\mathbf{e}_r + \frac{b}{r}\mathbf{e}_\varphi \quad , \; a,b > 0 \,.$$

Zeigen Sie, dass die Stromlinien logarithmische Spiralen sind. Berechnen Sie dazu die Gleichung der Stromlinie, die durch den Ort $(r_0, \varphi = 0)$ geht.

**M Aufgabe 6**: *Deformation und Drehung*

Gegeben sei das folgende Geschwindigkeitsfeld in $\mathbb{R}^2$ $(\gamma > 0)$:

$$\mathbf{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma x \end{pmatrix} .$$

(a) Skizzieren Sie das Geschwindigkeitsfeld und berechnen Sie den Verzerrungsgeschwindigkeitstensor $\mathbf{A}$ sowie den Drehgeschwindigkeitstensor $\mathbf{W}$.

(b) Finden Sie eine geeignete Basis, in der $\mathbf{A}$ diagonal wird und interpretieren Sie die Eigenwerte.

(c) Finden und skizzieren Sie ein Geschwindigkeitsfeld, welches die Bedingung $\mathbf{W} = 0$ erfüllt, mit $\mathbf{A}$ wie in (a).

(d) Finden und skizzieren Sie ein Geschwindigkeitsfeld, welches die Bedingung $\mathbf{A} = 0$ erfüllt, mit $\mathbf{W}$ wie in (a).