

Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

4. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe/Vorrechnen: Mi. 14.05.2014 zu Beginn der Übung

M Aufgabe 11: Spannungstensor einer Newtonschen Flüssigkeit

Der Spannungstensor \mathbf{T} einer Newtonschen Flüssigkeit ist gegeben durch $\mathbf{T} = \mathbf{T}^0 + \mathbf{T}'$, wobei der statische Anteil durch $\mathbf{T}^0 = -p\mathbf{1}$ mit dem Druck p gegeben ist und der dissipative Anteil durch $\mathbf{T}' = 2\eta\mathbf{A} + \eta'\mathbf{1SpA}$ mit den Viskositäten η und η' und der Deformationsrate \mathbf{A} .

- (a) Zerlegen Sie \mathbf{T}' in einen spurlosen Anteil und einen Anteil mit nichtverschwindender Spur und zeigen Sie, dass:

$$\eta \geq 0, \quad \eta' + \frac{2}{3}\eta \geq 0. \quad (3.58)$$

- (b) Zeigen Sie, dass

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \eta') \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (3.61)$$

M Aufgabe 12: Thermodynamik isotroper Flüssigkeiten

Für kanonische Ensembles wird die freie Energie F (als Funktion der Temperatur T , Teilchenanzahl N und Volumen V) als thermodynamisches Potential verwendet. Die spezifische Freie Energie f ist dann definiert über $F = \int \rho f d^3x$ mit der Massendichte ρ .

- (a) Zeigen Sie, dass für den Druck p gilt:

$$p = \rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho}. \quad (3.39)$$

Berechnen Sie die spezifische Entropie s .

- (b) Zeigen Sie, dass für die spezifische innere Energie u in Abhängigkeit von T und ρ gilt:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)_T = \frac{p}{\rho^2} + T \left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_T. \quad (3.100)$$

Beachten Sie, dass die innere Energie U normalerweise als Funktion von S , V und N gegeben ist. Zeigen Sie ferner, dass folgende Maxwell-Relation gilt:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_T = -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho. \quad (3.99)$$

S Aufgabe 13 (5 Punkte): Wirbelstärke

Die Wirbelstärke $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{v}$ stellt eine zentrale Größe der Hydrodynamik dar und kann anschaulich als die Tendenz eines Fluidelements zur Eigendrehung um eine Achse beschrieben werden.

- (a) Leiten Sie ausgehend von der Navier-Stokes-Gleichung einer idealen inkompressiblen Flüssigkeit

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p,$$

folgende Gleichung für die Wirbelstärke $\boldsymbol{\omega}$ her:

$$(1) \quad \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}).$$

4. Übung SP SS14

In dieser Aufgabe sollen zweidimensionale inkompressible Flüssigkeiten (d.h. solche mit $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) untersucht werden. Das Geschwindigkeitsfeld einer solchen Flüssigkeit lässt sich darstellen als

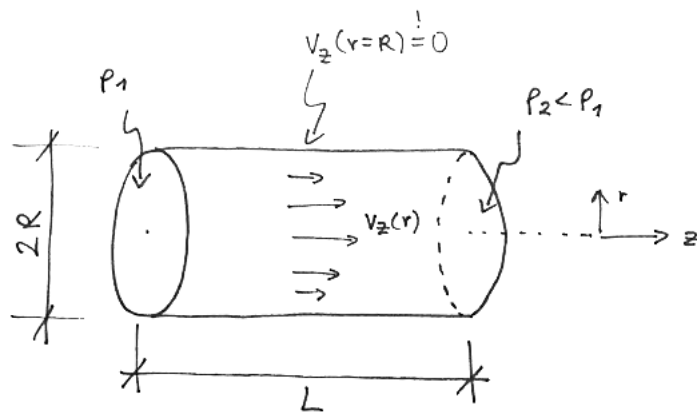
$$(2) \quad \mathbf{v} = \nabla \times (\Phi(x, y, t) \mathbf{e}_z),$$

mit der sog. Strömungsfunktion $\Phi(x, y, t)$. Im Folgenden soll nun eine stationäre Strömungsfunktion $\Phi(x, y, t) \equiv \Phi(x, y) \equiv \Phi(|\mathbf{r}|)$ betrachtet werden.

- (b) Es gelte $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. Welche Differentialgleichung erhalten Sie nun für Φ ? Lösen Sie diese Gleichung und finden Sie $\Phi(|\mathbf{r}|)$.
- (c) Es gelte $|\boldsymbol{\omega}| = 2\omega_0 = \text{const.}$. Finden Sie $\Phi(|\mathbf{r}|)$.
- (d) Berechnen Sie den Verzerrungsgeschwindigkeitstensor \mathbf{A} sowie den Drehgeschwindigkeitstensor \mathbf{W} für beide Fälle und erläutern Sie den qualitativen Unterschied.

S Aufgabe 14 (5 Punkte): Poiseuille Strömung

Eine wichtige Anwendung der Navier-Stokes-Gleichungen ist die Strömung einer Flüssigkeit durch



ein zylindrisches Rohr mit Radius R und Länge L . Wir wollen uns auf den Spezialfall einer laminaren, inkompressiblen, stationären Newtonschen Flüssigkeit mit Viskosität η beschränken. Zusätzlich sollen Gravitationskraft und andere externe Kräfte vernachlässigt werden.

- (a) Lösen Sie die Navier-Stokes-Gleichungen mit den oben angegebenen Voraussetzungen, und bestimmen Sie Druck- und Geschwindigkeitsfeld. Verwenden Sie haftende Randbedingungen und eine gegebene Druckdifferenz $\Delta p = p_1 - p_2 > 0$.
Hinweis: Beachten Sie, dass das Geschwindigkeitsfeld einer realen Flüssigkeit an keinem Ort divergieren darf!
- (b) Berechnen Sie die Ausflussmenge Q pro Zeiteinheit:

$$Q = \int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f},$$

und zeigen Sie, dass $Q \propto R^4$ (Hagen-Poiseullesches Gesetz).