

Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)  
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

## 5. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

**Abgabe/Vorrechnen: Mi. 21.05.2014 zu Beginn der Übung**

**S Aufgabe 15 (5 Punkte):** *Zirkulare Couette-Strömung*

Im folgenden wollen wir eine Flüssigkeit zwischen zwei coaxialen, unendlich langen Zylindern mit Radien  $R_1, R_2$  betrachten, wobei  $R_1 < R_2$ . Die beiden Zylinder rotieren dabei mit den Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$  und  $\omega_2$  um ihre ortsfesten Achsen.

- (a) Berechnen Sie das Geschwindigkeits- und Druckfeld der Flüssigkeit aus den Navier-Stokes-Gleichungen. Gehen Sie von einer laminaren, stationären, inkompressiblen Strömung und haftenden Randbedingungen aus und vernachlässigen Sie die Gravitation.
- (b) Vergleichen Sie das Ergebnis für  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  mit den Ergebnissen aus Aufgabe 13 (b),(c). Betrachten Sie die Spezialfälle (i)  $\omega_1 = \omega_2$  und (ii)  $R_2 \rightarrow \infty, \omega_2 \rightarrow 0$ .

**M Aufgabe 16:** *Diffusionsgleichung für Wirbel*

Die Diffusionsgleichung für Wirbel ist gegeben durch

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\nabla^2\right)\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{b} \quad (3.72)$$

mit der Diffusionskonstante  $D = \eta/\rho_0$  und  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ .

- (a) Nehmen Sie nun an, dass eine Störung am Punkt  $\mathbf{x}_0$  und zur Zeit  $t = 0$  in die Richtung  $\mathbf{n}$  wirkt, so dass

$$(1) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - D\nabla^2\right)\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\delta(t)$$

und mit  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} = G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, t)$ . Berechnen Sie die Greensche Funktion  $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, t)$ .

*Hinweis:* Verwenden Sie

$$\int d\mathbf{k} dy \frac{e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x}-yt)}}{-iy + Dk^2} = \frac{2\pi^{5/2}}{(Dt)^{3/2}} \exp\left[-\frac{\mathbf{x}^2}{4Dt}\right].$$

- (b) Beweisen Sie

$$\langle (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 \rangle = \int (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, t) d^3x = 6Dt, \quad (3.75)$$

mittels partieller Integration.

*Hinweis:* Verwenden Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/c^2} dy = \sqrt{\pi}|c|.$$

**S Aufgabe 17 (5 Punkte):** *Stokesgleichung aus Variationsprinzip*

Lösungen  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  der Stokeschen Gleichung

$$0 = -\nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{v} \quad (4.1)$$

extremalisieren die Dissipationsleistung des Geschwindigkeitsfeldes

$$W = \int T'_{ij} A_{ij} d^3x = 2\eta \int A_{ij}^2 d^3x, \quad (4.2)$$

## 5. Übung SP SS14

wenn zusätzlich gefordert wird, dass die Divergenz des Vektorfelds verschwindet. Deshalb kann die Stokesgleichung auch durch ein Variationsverfahren gewonnen werden. Die Divergenzfreiheit geht mit dem Lagrangeparameter  $p$  als Nebenbedingung ein,

$$\delta \left( W - 2 \int p \nabla \cdot \mathbf{v} \, d^3x \right) = \delta \left( \int 2\eta A_{ij}^2 - 2p \nabla \cdot \mathbf{v} \, d^3x \right) = 0 .$$

- (a) Zeigen Sie, dass das Variationsproblem äquivalent zu der Stokesgleichung ist, also die Aussage

$$\delta \left( \int 2\eta A_{ij}^2 - 2p \nabla \cdot \mathbf{v} \, d^3x \right) = 0 \Leftrightarrow -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} = 0 \quad (4.3)$$

gilt.

- (b) Welche Randbedingungen ergeben sich, wenn Sie auf der Oberfläche eine Variation zulassen ( $\delta \mathbf{v}|_{\partial V} \neq 0$ ) oder verbieten ( $\delta \mathbf{v}|_{\partial V} = 0$ )?