Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik
http://www.tu-berlin.de/?145990

28. Mai 2014

Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

7. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe/Vorrechnen: Mi. 04.06.2014 zu Beginn der Übung

S Aufgabe 21 (10 Punkte): *Strömung um einen Kreis*

Die komplexe Funktion

$$f(z) = z + \frac{1}{z} ,$$

mit $z = x+iy = re^{i\varphi}$, bildet den oberen Außenraum des Einheitskreises $G = \{re^{i\varphi}|r \geq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$ bijektiv in die obere Halbebene $H = \{x + iy|y \geq 0\}$ ab.

(a) Zeigen Sie, dass der Rand von G auf den Rand von H abgebildet wird und dass Halbkreise mit $r > 1$ auf halbe Ellipsen abgebildet werden.

Eine komplexe Funktion $g(z) = u(z)+iv(z)$ nennt man analytische Funktion wenn sie die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} .$$

(b) Zeigen Sie, dass $f(z)$ analytisch ist.

Lösungen der Laplace-Gleichung $\triangle h(x, y) = 0$, nennt man harmonische Funktionen. Laut Aufgabe 13 (b) ist damit die Strömungsfunktion einer wirbelfreien und inkompressiblen Strömung in zwei Dimensionen eine harmonische Funktion. Eine Lösung der Laplace-Gleichung auf H, die auf dem Rand von H verschwindet ist die Funktion $\Psi(x, y) = y$. Verwenden Sie folgenden Satz um daraus eine Lösung der Laplace-Gleichung auf G zu bestimmen, die auf dem Rand von G verschwindet.

Harmonische Funktionen von analytischen Funktionen sind harmonisch.

$\Psi(f(z))$ ist also eine Strömungsfunktion einer wirbelfreien und inkompressiblen Strömung auf G, die auf dem Rand von G verschwindet.

(c) Bestimmen und skizzieren Sie $\Psi(f(z))$. Zeigen Sie, dass die Niveaulinien von $\Psi(f(z))$ gerade die Stromlinien der Strömung sind.

(d) Berechnen Sie das Geschwindigkeitsfeld aus der Strömungsfunktion und vergleichen Sie das Resultat mit dem Feld um eine Kugel (mit $R = 1$ und $U = 1$) aus Aufgabe 20 (c).

M Aufgabe 22: *Reibungstensor eines Zylinders*

Zwischen der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ eines Köpers, der sich durch eine Flüssigkeit bewegt, und der hierzu benötigten Kraft $\mathbf{f}$ besteht der Zusammenhang $\mathbf{f} = \mathbf{\Gamma v}$. Der Reibungstensor $\mathbf{\Gamma}$ ist hierbei stets symmetrisch:

$$\mathbf{\Gamma}^T = \mathbf{\Gamma} .$$

Wir betrachten nun einen zylindersymmetrischen Körper, dessen Symmetrieachse $\mathbf{n}$ in Richtung der z-Achse weise. Sei $\mathbf{R}$ eine Symmetrieoperation (Drehung, Spiegelung), die den Körper in sich selbst überführt. Es gilt dann

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{R\Gamma R}^T .$$

(a) Betrachten Sie das Transformationsverhalten von $\mathbf{\Gamma}$ unter einer $90°$-Drehung um die z-Achse. Welche Form folgt daraus für den Tensor $\mathbf{\Gamma}$?

(b) Formulieren Sie das Ergebnis unabhängig von einem speziellen Koordinatensystem, nur in Abhängigkeit von der Achse $\mathbf{n}$. Zeigen Sie, dass sich $\boldsymbol{\Gamma}$ in der Form

$$\boldsymbol{\Gamma} = \Gamma_{||} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \Gamma_{\perp} (\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \; ,$$

schreiben lässt. Welche Bedeutung haben die Matrizen $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ und $\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ bzw. die Reibungskonstanten $\Gamma_{||}$ und $\Gamma_{\perp}$?