

Prof. Dr. Sabine Klapp,  
Dipl.-Phys. Arash Azhand, Dipl.-Phys. Ken Lichtner, M. Sc. Jan Totz, Kilian Kuhla

## 7. Übungsblatt – Thermodynamik und Statistik

**Abgabe: Mo. 08.06.2014 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an.

### Aufgabe 19 (4 Punkte): Großkanonisches Ensemble

Betrachten Sie ein System, welches sich in Kontakt mit einem Wärmebad und einem Teilchenreservoir befindet von der quantenstatistischen Perspektive.

- (a) Bestimmen Sie die Nebenbedingungen, unter denen die Entropie maximal wird.
- (b) Benutzen Sie das Prinzip der maximalen Entropie, um den statistischen Operator des Systems herzuleiten.

### Aufgabe 20 (10 Punkte): Statistischer Operator

Der statistische Operator  $\hat{\rho}$  (auch Dichteoperator oder Dichtematrix) ist ein positiv semidefiniter (Eigenwerte  $\geq 0$ ) Operator mit Spur 1. Er charakterisiert den Zustand eines quantenmechanischen Systems und kann allgemein in der Form  $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$  geschrieben werden. Hierbei sind  $p_i \in [0, 1]$  Gewichte für die nicht notwendigerweise orthonormalen Zustände  $|\psi_i\rangle$ . Ein reiner Zustand ist dadurch charakterisiert, dass man den zugehörigen statistischen Operator in der Form  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$  schreiben kann.

- (a) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen  $\text{Tr}\{\hat{\rho}^2\} \leq 1$  erfüllt ist und dass für reine Zustände das Gleichheitszeichen gilt.

Betrachten Sie die folgenden Operatoren:

- (1)  $\hat{\rho}_1 = |+\rangle\langle+|,$   $\hat{\rho}_2 = \frac{1}{2}|+\rangle\langle+| + \frac{1}{2}|-\rangle\langle-|,$
- (2)  $\hat{\rho}_3 = \frac{7}{8}|+\rangle\langle+| + \frac{1}{8}|-\rangle\langle+|,$   $\hat{\rho}_4 = \frac{1}{4}|+\rangle\langle+| + \frac{3}{4}|-\rangle\langle-|,$
- (3)  $\hat{\rho}_5 = \frac{1}{2}\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle+| - |+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle-|\right).$

Hier bilden  $|\pm\rangle$  ein vollständiges Orthonormalsystem und bezeichnen die Zustände eines Spin-1/2-Teilchens. Außerdem gilt in dieser Basis  $\hat{S}_x|\pm\rangle = \frac{1}{2}|\mp\rangle$  und  $\hat{S}_z|\pm\rangle = \pm\frac{1}{2}|\pm\rangle$  bzgl. der Spinoperatoren  $\hat{S}_i$ .

- (b) Welche dieser Operatoren  $\hat{\rho}_i$  genügen der Definition eines statistischen Operators?
- (c) Welche dieser statistischen Operatoren  $\hat{\rho}_i$  beschreiben ein System in einem reinen Zustand?
- (d) Berechnen Sie die Mittelwerte  $\langle\hat{S}_i\rangle_n = \text{Tr}\{\hat{\rho}_n\hat{S}_i\}$  und die Fluktuationen  $\langle\hat{S}_i^2\rangle_n - \langle\hat{S}_i\rangle_n^2$  bzgl. der statistischen Operatoren  $\hat{\rho}_n$  aus Teilaufgabe (b).

## 7. Übung TPIV SS14

### Aufgabe 21 (6 Punkte): Quantenoszillatoren

Betrachten Sie ein System aus  $N$  unabhängigen, quantenmechanischen harmonischen Oszillatoren, alle mit der gleichen Frequenz  $\omega$ . Jeder dieser Oszillatoren besitze einen Eigenzustand  $|n_i\rangle$  (mit  $i = 1, \dots, N$ ) und Eigenenergien  $\epsilon_i = \hbar\omega (n_i + \frac{1}{2})$ , mit  $n_i = 0, 1, 2, \dots$ .

- Wie sieht der Hamiltonian  $\hat{H}$  des vollen Systems aus? Wie sehen die zugehörigen Eigenwerte und Eigenzustände aus?
- Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme des Gesamtsystems.
- Bestimmen Sie die innere Energie  $E = \langle \hat{H} \rangle$  und vergleichen Sie ihr Ergebnis mit dem Ergebnis aus Aufgabe 13(b). Was passiert mit  $E$  für  $T \rightarrow 0$  und  $T \rightarrow \infty$ ?

**Vorlesung:** Mi. um 12:15 Uhr – 13:45 Uhr in EW 203,  
Fr. um 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203.

#### Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien (mindestens einmal vorrechnen).
- Bestandene Klausur.

#### Literatur zur Lehrveranstaltung:

- M. Plischke, B. Bergersen, Equilibrium Statistical Physics, (World Scientific)
- W. Nolting, Theoretische Physik 6, (Springer)
- F. Schwabl, Statistische Mechanik, (Springer)
- L. D. Landau, E. M. Lifschitz, Statistische Physik (Akademie Verlag)
- D. Wu, D. Chandler, Introduction to Modern Statistical Mechanics, (Oxford)
- L. E. Reichel, A Modern Course in Statistical Physics, (Edward Arnold LTD)

#### Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
Prof. Sabine Klapp	Di	12:15 – 13:00 Uhr	EW 707	23763
Arash Azhand	Do	15:15 – 16:00 Uhr	EW 627	27681
Ken Lichtner	Mi	15:15 – 16:00 Uhr	EW 266	28849
Jan Totz	Do	15:15 – 16:00 Uhr	EW 627	27681
Kilian Kuhla	Di	13:15 – 14:00 Uhr	EW 60/61	26143