

Prof. Dr. Sabine Klapp,
Dipl.-Phys. Arash Azhand, Dipl.-Phys. Ken Lichtner, M. Sc. Jan Totz, Kilian Kuhla

7. Übungsblatt – Thermodynamik und Statistik

Abgabe: Mo. 08.06.2014 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an.

Aufgabe 19 (4 Punkte): Großkanonisches Ensemble

Betrachten Sie ein System, welches sich in Kontakt mit einem Wärmebad und einem Teilchenreservoir befindet von der quantenstatistischen Perspektive.

- (a) Bestimmen Sie die Nebenbedingungen, unter denen die Entropie maximal wird.
- (b) Benutzen Sie das Prinzip der maximalen Entropie, um den statistischen Operator des Systems herzuleiten.

Aufgabe 20 (10 Punkte): Statistischer Operator

Der statistische Operator $\hat{\rho}$ (auch Dichteoperator oder Dichtematrix) ist ein positiv semidefiniter (Eigenwerte ≥ 0) Operator mit Spur 1. Er charakterisiert den Zustand eines quantenmechanischen Systems und kann allgemein in der Form $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ geschrieben werden. Hierbei sind $p_i \in [0, 1]$ Gewichte für die nicht notwendigerweise orthonormalen Zustände $|\psi_i\rangle$. Ein reiner Zustand ist dadurch charakterisiert, dass man den zugehörigen statistischen Operator in der Form $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ schreiben kann.

- (a) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen $\text{Tr}\{\hat{\rho}^2\} \leq 1$ erfüllt ist und dass für reine Zustände das Gleichheitszeichen gilt.

Betrachten Sie die folgenden Operatoren:

- (1) $\hat{\rho}_1 = |+\rangle\langle+|,$ $\hat{\rho}_2 = \frac{1}{2}|+\rangle\langle+| + \frac{1}{2}|-\rangle\langle-|,$
- (2) $\hat{\rho}_3 = \frac{7}{8}|+\rangle\langle+| + \frac{1}{8}|-\rangle\langle+|,$ $\hat{\rho}_4 = \frac{1}{4}|+\rangle\langle+| + \frac{3}{4}|-\rangle\langle-|,$
- (3) $\hat{\rho}_5 = \frac{1}{2}\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle+| - |+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle-|\right).$

Hier bilden $|\pm\rangle$ ein vollständiges Orthonormalsystem und bezeichnen die Zustände eines Spin-1/2-Teilchens. Außerdem gilt in dieser Basis $\hat{S}_x|\pm\rangle = \frac{1}{2}|\mp\rangle$ und $\hat{S}_z|\pm\rangle = \pm\frac{1}{2}|\pm\rangle$ bzgl. der Spinoperatoren \hat{S}_i .

- (b) Welche dieser Operatoren $\hat{\rho}_i$ genügen der Definition eines statistischen Operators?
- (c) Welche dieser statistischen Operatoren $\hat{\rho}_i$ beschreiben ein System in einem reinen Zustand?
- (d) Berechnen Sie die Mittelwerte $\langle\hat{S}_i\rangle_n = \text{Tr}\{\hat{\rho}_n\hat{S}_i\}$ und die Fluktuationen $\langle\hat{S}_i^2\rangle_n - \langle\hat{S}_i\rangle_n^2$ bzgl. der statistischen Operatoren $\hat{\rho}_n$ aus Teilaufgabe (b).

7. Übung TPIV SS14

Aufgabe 21 (6 Punkte): Quantenoszillatoren

Betrachten Sie ein System aus N unabhängigen, quantenmechanischen harmonischen Oszillatoren, alle mit der gleichen Frequenz ω . Jeder dieser Oszillatoren besitze einen Eigenzustand $|n_i\rangle$ (mit $i = 1, \dots, N$) und Eigenenergien $\epsilon_i = \hbar\omega (n_i + \frac{1}{2})$, mit $n_i = 0, 1, 2, \dots$.

- Wie sieht der Hamiltonian \hat{H} des vollen Systems aus? Wie sehen die zugehörigen Eigenwerte und Eigenzustände aus?
- Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme des Gesamtsystems.
- Bestimmen Sie die innere Energie $E = \langle \hat{H} \rangle$ und vergleichen Sie ihr Ergebnis mit dem Ergebnis aus Aufgabe 13(b). Was passiert mit E für $T \rightarrow 0$ und $T \rightarrow \infty$?

Vorlesung: Mi. um 12:15 Uhr – 13:45 Uhr in EW 203,
Fr. um 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203.

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien (mindestens einmal vorrechnen).
- Bestandene Klausur.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- M. Plischke, B. Bergersen, Equilibrium Statistical Physics, (World Scientific)
- W. Nolting, Theoretische Physik 6, (Springer)
- F. Schwabl, Statistische Mechanik, (Springer)
- L. D. Landau, E. M. Lifschitz, Statistische Physik (Akademie Verlag)
- D. Wu, D. Chandler, Introduction to Modern Statistical Mechanics, (Oxford)
- L. E. Reichel, A Modern Course in Statistical Physics, (Edward Arnold LTD)

Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
Prof. Sabine Klapp	Di	12:15 – 13:00 Uhr	EW 707	23763
Arash Azhand	Do	15:15 – 16:00 Uhr	EW 627	27681
Ken Lichtner	Mi	15:15 – 16:00 Uhr	EW 266	28849
Jan Totz	Do	15:15 – 16:00 Uhr	EW 627	27681
Kilian Kuhla	Di	13:15 – 14:00 Uhr	EW 60/61	26143