

Vorlesung: Dr. Philipp Hövel, PD Dr. Kathy Lüdge
Übung: Dr. Vitaly Belik

1. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Nichtlineare Dynamik und Kontrolle

Abgabe: Mi. 30.04.2014 in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Der Code der Programmieraufgaben kann per E-Mail eingereicht werden. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.

Aufgabe 1 (10 Punkte): Lotka-Volterra-Modell

Mit den Lotka-Volterra-Gleichungen lassen sich Populationsdynamiken beschreiben. Hier betrachten wir die Wechselwirkungen zwischen einer Population von Schildläusen und Marienkäfer:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= rS - \alpha SM \\ \dot{M} &= -qM + \beta SM\end{aligned}$$

mit $r > 0$, $q > 0$, $\alpha > 0$ und $\beta > 0$. S bzw. M beschreibt die Anzahl der Läuse bzw. Marienkäfer.

1. Kommentieren Sie die biologische Bedeutung der einzelnen Terme.
2. Finden Sie die Fixpunkte und charakterisieren Sie diese (stabil/instabil, Fokus/Sattel/Knoten). Gibt es Fälle, in denen die lineare Stabilitätsanalyse versagt?
3. Finden Sie eine Konstante der Bewegung $c(S, M)$, indem Sie durch Trennung der Variablen $\frac{dS}{dM}$ integrieren.
4. Skizzieren sie die Dynamik im Phasenraum. Zeichnen Sie die Nullklinen und die Fixpunkte ein. Warum genügt es, den ersten Quadranten zu betrachten? Zeichnen Sie auch Höhenlinien ein, d.h. Linien mit konstantem $c(S, M) = c_0$ ein. Sie können gerne dafür den Computer verwenden. Die Parameter können Sie zum Beispiel wie folgt wählen: $\alpha = \beta = 0.01$, $r = 0.1$ und $q = 0.5$. Sinnvolle Werte für die Höhenlinien sind dann $c_0 = -1.3$, $c_0 = -1.4$ und $c_0 = -1.5$. Was können Sie nun über den Fixpunkt sagen, den Sie in Aufgabenteil 3 nicht vollständig bestimmen konnten?
5. Was passiert, wenn zur Bekämpfung der Läuseplage Insektizide eingesetzt werden? Betrachten Sie dafür ein leicht erweitertes Modell:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= rS - \alpha SM - kS \\ \dot{M} &= -qM + \beta SM - kM\end{aligned}$$

wobei $k > 0$ die Sterberate der Schildläuse und Marienkäfer bedingt durch den Insektizideinsatz ist. Wie verschieben sich die Fixpunkte? Nehmen Sie $r > k$ an. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Bitte Rückseite beachten! →

1. Übung TPVI: Nichtlineare Dynamik und Kontrolle, SS 14

Aufgabe 2 (10 Punkte): Van-der-Pol-Oszillator

Van der Pol untersuchte in den 30er Jahren einen harmonischen Oszillator mit einem nichtlinearen Dämpfungsterm

$$\ddot{x} + \kappa(x^2 - a)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\kappa \geq 0).$$

Wenn $a > 0$ ist, verhält sich dieser für große Amplituden wie eine Reibung, wechselt aber für kleine Amplituden das Vorzeichen und führt so zu Schwingungen mit endlicher Amplitude.

1. Schreiben Sie die Gleichung als System von zwei Differenzialgleichungen erster Ordnung mit $y = \dot{x}$ und finden Sie die Fixpunkte sowie deren Stabilität.
2. Lösen Sie die Gleichungen numerisch für $\kappa = 1$, $\omega_0 = 1$ und 1000 verschiedenen a Werten aus $[-1, 1]$. Lassen Sie in jeder Simulation eine transiente Zeit verstreichen (ca. 100 Zeiteinheiten) und tragen Sie dann Maxima und Minima von x über den a Werten auf, um so ein Bifurkationsdiagramm zu erhalten.
Plotten Sie außerdem das Phasen-Portrait in der (x, y) -Ebene für $a = 0.1$, $a = 1$, und $a = 2$. Erläutern Sie das Verhalten des Oszillators, wenn a verändert wird.

Vorlesung:	<ul style="list-style-type: none">• Dienstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203.• Donnerstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203.
Übung:	<ul style="list-style-type: none">• Mittwoch, 12:15 – 13:45 Uhr im EW 731.
Anmeldung:	Die Punkteverteilung und Scheinvergabe zu der Vorlesung "Theoretische Physik VI: Nichtlineare Dynamik und Kontrolle" erfolgt über das Moseskontosystem: https://moseskonto.tu-berlin.de/moseskonto .
Webseiten:	<ul style="list-style-type: none">• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter http://www.itp.tu-berlin.de/?nonlin_dyn_ss14• Visualisierung gibt es unter: http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/owl/nichtlineare_dynamik
Scheinkriterien:	<ul style="list-style-type: none">• Mindestens 50% der Übungspunkte. (Abgabe in Dreiergruppen).• Bearbeitung und Vorstellung eines Projektes (Projektvorstellung in der letzten Vorlesungswoche).• Regelmäßige und aktive Teilnahme in der Übung.
Kontakte:	<ul style="list-style-type: none">• Dr. Philipp Hövel, EW 633, 314-27658, phoevel@physik.tu-berlin.de, Sprechzeiten nach Vereinbarung.• PD Dr. Kathy Lüdge, EW 741, 314-23002, kathy.luedge@tu-berlin.de, Sprechzeiten nach Vereinbarung.• Dr. Vitaly Belik, EW 633, 314-27658, vitaly.belik@campus.tu-berlin.de, Sprechzeiten Mi. 15:00-16:00