Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Vitaly Belik, Dr. Alexander Carmele
Mathias Hayn, Alexander Kraft

4. Übungsblatt – Thermodynamik und Statistik

Abgabe: Mi. 20.05.2015 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen.

Aufgabe 8 (5 Punkte): Ableitung der Mastergleichung

Ausgehend von der Dichtematrixgleichung,

$$i\hbar\partial_t\rho_{mn} = (\epsilon_m - \epsilon_n)\rho_{mn} + \sum_i (V_{mi}\rho_{in} - V_{in}\rho_{mi}),$$

soll die Ableitung der Mastergleichung

$$i\hbar\partial_t\rho_{nn} = -\sum_m \left(p_{nm}\rho_{nn} - p_{nm}\rho_{mm}\right),$$

(wie in der VL kurz skizziert) durchgeführt werden. Was sind die grundlegenden Unterschiede der beiden Gleichungstypen?

Aufgabe 9 (12 Punkte): Mastergleichung für Generation und Rekombination
Generations- und Rekombinations-Prozesse bilden eine wichtige Familie von Markov Prozessen. Kennzeichnend für sie ist, dass nur Übergänge zwischen benachbarten Zuständen n betrachtet werden ("one-step-process"). Die Mastergleichung für solche Prozesse hat folgende Form:

$$\dot{\rho_n}(t) = -G(n)\rho_n(t) + G(n-1)\rho_{n-1}(t) - R(n)\rho_n(t) + R(n+1)\rho_{n+1}(t),$$

wobei $G(n)$ die Generationsrate und $R(n)$ die Rekombinationsrate ist. $\rho_n(t)$ ist die Wahrscheinlichkeit das System zur Zeit t im Zustand n zu finden.

(a) Erklären Sie die einzelnen Terme in der Gleichung mit Hilfe einer Skizze.

(b) Ein Poisson-Prozess (wie z.B. das Tunneln durch eine Barriere - "Schrotrauschen") ist gekennzeichnet durch eine konstante Generationsrate $G(n) = g$ und eine verschwindende Rekombinationsrate $R(n) = 0$
1) Lösen Sie die resultierende Mastergleichung für die Anfangsbedingung $\rho_n(0) = \delta_{n,0}$ (mit $n \geq 0$). Tipp: Führen Sie die Erzeugende Funktion $G(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \rho_n$ ein und bestimmen Sie diese durch Lösen der durch Einsetzen der Mastergleichung resultierenden DGL.
2) Zeigen Sie, dass die Relation $\langle n \rangle_t = s\frac{\partial}{\partial s}G(s,t)|_{s=1}$ gilt, und berechnen sie damit $\langle n \rangle_t$
3) Zu welcher Zeit ist die Wahrscheinlichkeit $\rho_n(t)$ für einen gegebenen Wert n maximal?

(c) Die Mastergleichung für ein Populationsmodell erhält man mit der Geburtenrate $G(n) = gn$ und der Sterberate $R(n) = rn$. Da die Raten nicht mehr konstant sind, ist das Lösen der Gleichung auf dem unter (b) skizzierten Weg analytisch sehr aufwendig. Nichtsdestotrotz kann man eine Differentialgleichung für den Mittelwert der resultierenden Verteilung aufstellen, indem man die Summe $\sum_{n=0}^{\infty} n\dot{\rho_n}$ ausführt. Lösen sie die für $\langle n \rangle_t$ resultierende DGL und interpretieren Sie das Ergebnis .

Vorlesung:	• Mittwoch 12:15 Uhr – 14:00 Uhr im EW 203 • Freitag 8:15 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203
Tutorien:	• Di 10:15-11:45 EW 229 • Mi 10:15-11:45 MA 642 • Do 12:15-13:45 EW 731 • Fr 12:15-13:45 EW 731
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. • Bestandene Klausur. • Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
Klausur:	• Mittwoch den 08.07.2015 von 12:00 – 14:00 Uhr im EW 203
Zettel:	• Ausgabe: Mittwochs in der VL. • Abgabe: 14 Tage später am Mittwoch bis 12 Uhr im Briefkasten (Ernst-Ruska/Altbau). • Abgabe der Übungszettel in 2-er Gruppen!
Sprechzeiten:	• Prof. Dr. Andreas Knorr: Di, 13–14 Uhr im EW 742 • Dr. Vitaly Belik : Mi, 15–16 Uhr im ER 240 • Dr. Alexander Carmele : Do, 14–15 Uhr im EW 704 • Mathias Hayn : Fr, 11–12 Uhr im EW 711 • Alexander Kraft : Di, 13–14 Uhr im EW 269
Literatur	• Torsten Fließbach: Statistische Physik • Frederick Reif: Statistische Mechanik und Theorie der Wärme • Eugen Fick/Günter Sauermann: Quantenstatistik Dynamischer Prozesse • Wolfgang Nolting: Grundkurs Theoretische Physik, Band 4 und 6 • Hermann Schulz: Statistische Physik • Wolfgang Muschik: Repetitorium Theoretische Physik