Vorlesung: Dr. Philipp Hövel, PD Dr. Kathy Lüdge
Übung: Dr. Vitaly Belik

6. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Nichtlineare Dynamik und Kontrolle

Abgabe: Do. 05.06.2014 in der Vorlesung (Die Übung am 4.6. fällt aus!)
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Der Code der Programmieraufgaben kann per E-Mail eingereicht werden. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.

Aufgabe 11 (10 Punkte): *Adaptive Kontrolle eines instabilen Fokus*

Betrachten Sie die adaptive Kontrolle eines instabilen Fokus mittels der *speed gradient method*:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \quad \lambda\, x + \omega\, y - K\,[x(t) - x(t-\tau)], \\
\dot{y} &= -\omega\, x + \lambda\, y - K\,[y(t) - y(t-\tau)], \\
\dot{K} &= -\gamma \frac{\partial \dot{Q}}{\partial K},
\end{aligned}$$

wobei $\gamma > 0$ die Adaptationsrate ist. Die Zielfunktion $Q(t)$ sei gegeben durch:

$$Q(t) = \frac{1}{2}\left\{[x(t) - x(t-\tau)]^2 + [y(t) - y(t-\tau)]^2\right\}.$$

1. Berechnen Sie für diese Zielfunktion $\dot{K}$.
2. Zeigen Sie, dass man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\gamma = 1$ annehmen kann.
3. Integrieren Sie das System für verschiedene Anfangsbedingungen $x(0) \in [0.02, 0.5]$ in Schritten von 0.02 in diesem Intervall und $y(0) = 0$. Wählen Sie dabei als *history*-Funktion $x(t) = y(t) = 0$ für $t < 0$ and $K(t) = 0$ für $t \leq 2\tau$. Das heißt: Schalten Sie die Kontrolle erst nach einer Zeit 2τ an. Verwenden Sie dabei die folgenden Werte für die Parameter: $\lambda = 0.5$, $\omega = \pi$ und $\tau = 1$.
   Plotten Sie die Zeitserien $x(t)$, $y(t)$ und $K(t)$.
   Tipp: Beachten Sie die Hinweise zur numerischen Integration aus Aufgabe 9.
4. Bestimmen Sie den Fixpunkt des Systems. Wie passt der berechnete Fixpunkt zum Ergebnis Ihrer Simulation aus Aufgabenteil 3?
5. Stellen Sie die charakteristische Gleichung für die Eigenwerte auf und vergleichen Sie diese mit der charakteristischen Gleichung eines Fokus mit zeitverzögerter Rückkopplungskontrolle, d.h. ohne dass K adaptiv angepasst wird (siehe Aufgabe 9). Interpretieren Sie das Ergebnis. Was beschreibt der zusätzliche Eigenwert?

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 12 (10 Punkte): *Logistisches Populationsmodell mit Delay*
Betrachten Sie das folgende Modell für die Anzahl N an Individuen in einer Population

$$\dot{N}(t) = rN(t)[1 - N(t-\tau)/K],$$

wobei r die Wachstumsrate und K ein Maß für die Tragfähigkeit der Umwelt ist.

1. Finden Sie die Transformation, die das Modell in die dimensionslose Gleichung

   $$x'(s) = x(s)[1 - x(s-a)]$$

   überführt. Betrachten Sie im folgenden nur noch die dimensionslose Gleichung.

2. Bestimmen Sie für $a = 0$ die Fixpunkte und analysieren Sie deren Stabilität.

3. Finden Sie analytisch den Wert $a > 0$, bei dem der stabile Fixpunkt seine Stabilität in einer Hopf-Bifurkation verliert.

4. Visualisieren Sie die Dynamik für $r = 1.0$ und $r = 1.8$ für den Fall verschwindender Zeitverzögerung und $\tau = 1.0$. Der Parameter K kann konstant angenommen werden: $K = 1$.