Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 10. Juni 2014
http://www.tu-berlin.de/?nonlin_dyn_ss14 Direktzugang: 145989

Vorlesung: Dr. Philipp Hövel, PD Dr. Kathy Lüdge
Übung: Dr. Vitaly Belik

Projekte zur TP VI: Nichtlineare Dynamik und Kontrolle

Durchführung

Die Projekte beinhalten Aufgaben aus verschiedenen Bereichen der nichtlinearen Dynamik und Kontrolle und können nach eigenen Vorstellungen bearbeitet werden (Numerik, Analytik, Zusammenfassung der Literatur, Experimente ...). Die in jeder Projektbeschreibung aufgeführten Punkte können als Leitfaden dienen, Sie können aber auch in Absprache mit den BetreuerInnen eigene Ideen verfolgen. Die Projekte sind so konzipiert, dass die Bearbeitung mit der angegebenen Literatur und dem Wissen aus der Vorlesung möglich ist. Zur vollständigen Bearbeitung gehören folgende Punkte:

1. Bearbeitung des Projekts in Zweier- oder Dreiergruppen. Die Einteilung der Themen erfolgt am 11.6.2014 in der Übung.
2. Präsentation der Ergebnisse in einem 15 minütigen Kurzvortrag (+5 Minuten Diskussion) am 15.7. oder 17.7.14. Wichtig ist hierbei in erster Linie die verständliche Darstellung. Beschränken Sie sich deshalb auf die zum Verständnis wesentlichen Punkte.
   Für den Vortrag werden maximal 40 Punkte vergeben.
3. Abgabe einer schriftlichen Ausarbeitung mit vollständiger Dokumentation der Lösungswege und vollständigen Quellenangaben bis 18.7.14. Auch hier soll die Verständlichkeit und übersichtliche Darstellung im Vordergrund stehen. Der Umfang der Ausarbeitung soll fünf bis zehn Seiten umfassen.
   Für die Ausarbeitung werden maximal 40 Punkte vergeben.

Während der gesamten Bearbeitungszeit stehen Ihnen die BetreuerInnen des jeweiligen Projektes für Fragen zur Verfügung. Bitte machen Sie individuell Termine mit den Betreuern aus.

Projekt 1: *Numerische Bifurkationsanalyse und Lösungsverfolgung*

Betreuer: Thomas Isele (`tommaso@itp.tu-berlin.de`, ER238),
Philipp Hövel (`phoevel@physik.tu-berlin.de`, EW633)

Bifurkationsanalysen sind wichtige Hilfsmittel für das Verständnis der Dynamik eines gegebenen Systems. Nur in wenigen Fällen ist sie analytisch durchführbar. Wird es zu kompliziert, kann man jedoch auf numerische Methoden zurückgreifen. Eine dieser Methoden ist die Lösungsverfolgung [1, 2, 3].

Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Betrachten Sie die in der Vorlesung behandelten Bifurkationen der Normalformen (siehe Kapitel 1) und übertragen Sie diese in den Computer.
- Weisen Sie verschiedene Bifurkationstypen mittels einen numerischen Programms wie z.B. DDE-BIFTOOL oder AUTO nach.
- Betrachten Sie das Rössler-System mit zeitverzögerter Rückkopplungskontrolle [4]. Untersuchen Sie mittels eines numerischen Programms wie z.B. DDE-BIFTOOL oder AUTO verschiedene Bifurkationen, die durch die Zeitverzögerung induziert werden.

Hinweis: Für dieses Projekt sind numerische Vorkenntnisse nötig. So ist z.B. DDE-BIFTOOL *ohne* MATLAB-*Kenntnisse nicht zu bedienen.*

Literatur

[1] H. Meijer, F. Dercole, and B. E. Oldeman: *Numerical Bifurcation Analysis*, in *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, edited by R. A. Myers (Springer Verlag, New York, 2009), vol. Part 1.

[2] K. Engelborghs, T. Luzyanina, and G. Samaey: *DDE-BIFTOOL v. 2.00: a matlab package for bifurcation analysis of delay differential equations*, Tech. Rep. TW-330, Department of Computer Science, K.U.Leuven, Belgium (2001).

[3] K. Engelborghs, T. Luzyanina, and D. Roose: *Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDE-Biftool*, ACM Transactions on Mathematical Software **28**, 1 (2002).

[4] A. G. Balanov, N. B. Janson, and E. Schöll: *Delayed feedback control of chaos: Bifurcation analysis*, Phys. Rev. E **71**, 016222 (2005).

Projekt 2: *Chaoskontrolle in autonomen Laufrobotern*

Betreuer: Philipp Hövel (phoevel@physik.tu-berlin.de, EW633)

In der Vorlesung haben wir verschiedene Methoden zur Kontrolle von chaotischen Systemen kennengelernt. Eine leistungsstarke Methode bildet dabei die zeitverzögerte Rückkopplung [1]. Aufbauend auf diesem Kontrollverfahren wurde an der Universität Göttingen eine autonome Robotersteuerung entwickelt [2, 3]. Diese ermöglicht es, mittels eines einfachen chaotischen Systems und seiner Kontrolle zwischen verschiedenen Gangarten zu wechseln. Mittlerweile wurde diese Technik erweitert, so dass der Laufroboter sogar Beschädigungen an den Beinen selbstständig kompensieren kann [4].
Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Programmieren Sie das chaotische System aus Ref. [2] inklusive des Kontrollverfahrens und stabilisieren Sie periodische Orbits verschiedener Periode.
- Diskutieren Sie, wie die Kontrolle genutzt wird, um verschiedene Gangarten zu steuern, und weitere Aspekte der Steuerung wie Optimierung, Lernverhalten etc. (Ref. [2]).
- Erläutern Sie, wie es den Göttingern gelang, einen stabilen Gang trotz eines zerstörten Beines zu realisieren (Ref. [4]).

Literatur

[1] K. Pyragas: *Continuous control of chaos by self-controlling feedback*, Phys. Lett. A **170**, 421 (1992).

[2] S. Steingrube, M. Timme, F. Wörgötter, and P. Manoonpong: *Self-organized adaptation of a simple neural circuit enables complex robot behaviour*, Nature Physics **6**, 224 (2010).

[3] E. Schöll: *Neural control: Chaos control sets the pace*, Nature Physics **6**, 161 (2010).

[4] G. Ren, W. Chen, C. Kolodziejski, F. Wörgötter, S. Dasgupta, and P. Manoonpong: *Multiple chaotic central pattern generators for locomotion generation and leg damage compensation in a hexapod robot*, in *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems* (2012), pp. 2756–2761.

Projekt 3: *Odd-number limitation*

Betreuer: Philipp Hövel (`phoevel@physik.tu-berlin.de`, EW633)

Lange Zeit glaubte man, dass periodiche Orbits mit einer ungeraden Anzahl reeller Floquet-Exponenten größer null weder mit zeitverzögerter Rückkopplungskontrolle (*time-delayed feedback control*: TDFC) noch mit erweiterter zeitverzögerter Rückkopplungskontrolle (*extended time-delayed feedback control*: ETDFC) stabilisiert werden können. Der, wie sich später zeigte, nur teilweise korrekte Beweis wurde durch Nakajima erbracht [1]. Erst ein Gegenbeispiel, die zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle einer subkritischen Hopfbifurkation, zeigte, dass die *odd-number limitiation* in ihrer ursprünglichen Form nicht gelten kann [2]. Es stellte sich heraus, dass Nakajimas Beweis zwar richtig ist für nicht-autonome Systeme, nicht aber für autonome. Für autonome Systeme ist eine Modifizierung des ursprünglichen Theorems möglich, die eine zusätzlich Bedingung für die Unkontrollierbarkeit eines Orbits durch TDFC [3] oder EDFC [4] aufstellt. In diesem Projekt soll vor allem die Kontrollierbarkeit eines *odd-number*-Orbits mit ETDFC untersucht werden.
Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Implementieren Sie die EDFC zur Kontrolle eines durch eine subkritischen Hopfbifukation erzeugten instabilen periodischen Orbits (System aus [2].) Testen Sie, ob für $R = 0$ das System bis zur erwarteten kritischen Kopplungsstärke stabilisiert.
- Untersuchen Sie nun die Stabilität für $R \neq 0$, in dem Sie beispielsweise ein Stabilitätsdiagramm für die (R, b_0)-Ebene erstellen (R: Gedächtnisparameter, b_0: Kopplungsstärke).
- Leiten Sie analytisch die Stabilitätsgrenze unter Benutzung von Ref. [4] her und vergleichen Sie diese mit Ihren numerischen Ergebnissen.
- Stellen Sie ein Experiment zur Stabilisierung eines *odd-number*-Orbits vor [5, 6].
- Erstellen Sie eine Visualisierung des Systems inkl. Kontrolle (Applet o.ä.).

Literatur

[1] H. Nakajima: *On analytical properties of delayed feedback control of chaos*, Phys. Lett. A **232**, 207 (1997).

[2] B. Fiedler, V. Flunkert, M. Georgi, P. Hövel, and E. Schöll: *Refuting the odd number limitation of time-delayed feedback control*, Phys. Rev. Lett. **98**, 114101 (2007).

[3] E. W. Hooton and A. Amann: *Analytical limitation for time-delayed feedback control in autonomous systems*, Phys. Rev. Lett. **109**, 154101 (2012).

[4] A. Amann and E. W. Hooton: *An odd-number limitation of extended time-delayed feedback control in autonomous systems*, Phil. Trans. R. Soc. A **371**, 20120463 (2013).

[5] C. v. Loewenich, H. Benner, and W. Just: *Experimental verification of Pyragas-Schöll-Fiedler control*, Phys. Rev. E **82**, 036204 (2010).

[6] S. Schikora, H. J. Wünsche, and F. Henneberger: *Odd-number theorem: Optical feedback control at a subcritical Hopf bifurcation in a semiconductor laser*, Phys. Rev. E **83**, 026203 (2011).

Projekt 4: *Halbleiterlaser mit optischer Injektion*

Betreuer: Benjamin Lingnau (`lingnau@mailbox.tu-berlin.de`, EW629),
Kathy Lüdge (`kathy.luedge@tu-berlin.de`, EW741)

Halbleiterlaser sind nichtlineare dynamische Systeme, die man schon mit wenigen Variablen gut beschreiben kann. Wird ein externes optisches Signal in einen Laserresonator eingekoppelt, zeigt der Laser je nach Art des Signals vielfältige dynamische Phänomene [1]. Ein spezielles Phänomen ist das sogenannte Phasenlocking, dabei kommt es zu einer Synchronisierung der Laserfrequenz mit der Frequenz des injizierten E-Felds [2]. Für kleine Injektionsstärken lässt sich dies als Spezialfall eines periodisch getriebenen Phasenoszillators auffassen, der sich mit der sogenannten Adlergleichung beschreiben lässt [3]. Mit Hilfe asymptotischer Methoden können hier analytische Lösungen für einige auftretende Bifurkationen gefunden werden.

Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch und diskutieren Sie das Modell und die Variablen, die zur Beschreibung eines Halbleiterlasers verwendet werden.
- Leiten Sie die Adlergleichung als Grenzfall aus den Lasergleichungen mit optischer Injektion her und vergleichen Sie die daraus gewonnen Ergebnisse mit dem tatsächlichen Verhalten eines optisch injizierten Halbleiterlasers.
- Bestimmen Sie ausgehend von den vollen Gleichungen für kleine Injektionsstärken das Nullte-Ordnungs-Problem und bestimmen Sie aus den Fixpunkten den Punkt der Sattel-Knoten-Bifurkation [2].
- Stellen Sie die Bedingungen für eine Hopf-Bifurkation auf und bestimmen Sie diese ebenfalls analytisch.
- Erstellen Sie aus den Ergebnissen ein zwei-Parameter-Bifurkationsdiagramm (Injektionfrequenz, Injektionsstärke) und vergleichen Sie die analytischen Ergebnisse mit numerischen Simulationen des vollen Systems.

Literatur

[1] S. Wieczorek, B. Krauskopf, T. Simpson, and D. Lenstra: *The dynamical complexity of optically injected semiconductor lasers*, Phys. Rep. **416**, 1 (2005).

[2] T. Erneux and P. Glorieux: *Laser Dynamics* (Cambridge University Press, UK, 2010).

[3] R. Adler: *A study of locking phenomena in oscillators*, Proc. IEEE **61**, 1380 (1973).

Projekt 5: *Synchronisation in Laser-Netzwerken aus Quantenpunktlasern: Master stability function*

Betreuer: Kathy Lüdge (`kathy.luedge@tu-berlin.de`, EW741)

In vielen natürlichen und technischen Netzwerken tritt Synchronisation auf: Im Gehirn ist Synchronisation Bestandteil vieler kognitiver Prozesse, kann aber auch pathologisch werden, beispielsweise bei Parkinson oder Epilepsie. Zur Anwendung in der Kryptographie wird chaotische Synchronization von Lasern untersucht.
Die hohe Dimension des Phasenraums – bedingt durch die große Anzahl von Knoten – macht numerische Untersuchungen der Stabilität schnell aufwändig. Die *master stability function* (MSF) erlaubt die Reduzierung auf ein System von der Dimension eines einzelnen Netzwerkknoten [1, 2, 3, 4] und ermöglicht es so, Dynamik und Topologie getrennt zu betrachten.
Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Implementieren Sie die dynamischen Gleichungen für einen Quantenpunktlaser[5] mit optischer Rückkopplung [6] und erstellen Sie ein Bifurkationsdiagramm über der Rückkopplungsstärke (wenn gewünscht kann hier auf existierenden Code zurückgegriffen werden).
- Berechnen Sie die MSF für ein System aus N gekoppelten Lasern (elektrisches Feld von Laser n ist E_n),

$$\dot{E}_i = (1+i\alpha)E_iN_i + Ke^{-i2C}\sum_{j=1}^{N} E_j(t-2\tau), \qquad j=1,\dots,N$$

  und wählen Sie drei verschiedene Werte für τ:

  - (i) vor der ersten Hopf Bifurkation
  - (ii) nach der ersten Hopf Bifurkation
  - (iii) im Bereich des Chaos

- Berechnen Sie die Eigenwerte der hier gewählten Kopplungsmatrix für das System aus N Lasern (all-to-all coupling). Wie ändern sich diese wenn die Laser unidirektional (in eine Richtung) im Ring miteinander verbunden werden? (Alle Kopplungsstärken sind gleich.)
- Interpretieren sie die Ergebnisse hinsichtlich der Stabilität der synchronen Lösung. Tragen Sie dazu die Eigenwerte ν_k der Kopplungsmatrix in den entsprechenden Plot der MSF ein.

Bitte nächste Seite beachten!⟶

Literatur

[1] L. M. Pecora and T. L. Carroll: *Master stability functions for synchronized coupled systems*, Phys. Rev. Lett. **80**, 2109 (1998).

[2] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D. U. Hwang: *Complex networks: Structure and dynamics*, Phys. Rep. **424**, 175 (2006).

[3] J. Lehnert: *Dynamics of Neural Networks with Delay*, Master's thesis, Technische Universität Berlin (2010).

[4] J. Lehnert, T. Dahms, P. Hövel, and E. Schöll: *Loss of synchronization in complex neural networks with delay*, Europhys. Lett. **96**, 60013 (2011).

[5] B. Lingnau, W. W. Chow, and K. Lüdge: *Amplitude-phase coupling and chirp in quantum-dot lasers: influence of charge carrier scattering dynamics*, Opt. Express **22**, 4867 (2014).

[6] C. Otto, K. Lüdge, and E. Schöll: *Modeling quantum dot lasers with optical feedback: sensitivity of bifurcation scenarios*, phys. stat. sol. (b) **247**, 829 (2010).

Projekt 6: *Dynamische Eigenschaften von zwei gekoppelten Halbleiterlasern*

Betreuer: Kathy Lüdge (`kathy.luedge@tu-berlin.de`, EW741)

Die Integration mehrerer optischer Elemente *Complex Photonics* hat in den letzten Jahren, motiviert durch komplexe Anforderungen an die Datenkommunikation und Datenübertragung, auch für die nichtlineare Dynamik an Bedeutung gewonnen [1]. Experimentell lässt sich ein kleines Netzwerk durch 2 optisch miteinander gekoppelte Halbleiterlaserlaser [2] realisieren. Wählt man den Abstand beider Laser sehr klein, kann man die Signallaufzeit vernachlässigen und das System mit gekoppelten Differentialgleichungen beschreiben[3]. In diesem Projekt soll dieses nichtlineare dynamische System näher untersucht werden, wobei besonderes Augenmerk auf der Stabilität der synchronen Lösung liegt, d.h. es ist die Frage zu klären, unter welchen Umständen, d.h. bei welchen Parametern, beide Laser trotz Kopplung die gleiche zeitliche Dynamik zeigen. Ausgangspunkt ist die analytische Arbeit von Yanchuk et al. [3], die einerseits nachvollzogen werden soll und andererseits durch numerische Simulationen untermauert werden kann.
Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch und diskutieren Sie das Modell und die Variablen, die zur Beschreibung eines Halbleiterlasers verwendet werden.
- Leiten sie für die Dynamik auf der synchronen Mannigfaltigkeit das charakteristische Polynom her [3] und bestimmen sie daraus die Eigenwerte im Parameterraum von Kopplungsstärke und Kopplungsphase numerisch.
- Was ändert sich wenn beide Laser noch der optischen Rückkopplung des eigenen Lichtes ausgesetzt sind?
- Stellen Sie das charakteristische Polynom auch für die anti-synchrone Lösung auf (wenn beide Laser mit einer Phasendifferenz von π schwingen). Was ändert sich hier mit Selbstrückkopplung?
- Visualisieren Sie Ihre Ergebnisse im Parameterraum von Kopplungsstärke und Kopplungsphase zusammen mit Ergebnissen aus der direkten numerischen Integration.

Literatur

[1] M. C. Soriano, J. García-Ojalvo, C. R. Mirasso, and I. Fischer: *Complex photonics: Dynamics and applications of delay-coupled semiconductors lasers*, Rev. Mod. Phys. **85**, 421 (2013).

[2] T. Erneux and P. Glorieux: *Laser Dynamics* (Cambridge University Press, UK, 2010).

[3] S. Yanchuk, K. R. Schneider, and L. Recke: *Dynamics of two mutually coupled semiconductor lasers: Instantaneous coupling limit*, Phys. Rev. E **69**, 056221 (2004).

Projekt 7: *Synchronization im Stromnetz*

Betreuer: Vitaly Belik (`vitaly.belik@campus.tu-berlin.de`, EW633)

Das Stromnetz der Vergangenheit war geprägt durch große Kohle-, Gas- und Atomkraftwerke und damit durch eine zentralisierte Struktur, wogegen der gegenwärtige Ausbau erneuerbarer Energie zu einer Dezentralisierung des Stromnetzes führt. Wichtige Voraussetzung für den stabilen Betrieb ist die Synchronization des gesamten Netzes. Dabei ergeben sich u.a. folgende Herausforderungen: Wie wirkt sich die Dezentralisierung auf die Stabilität der Synchronization aus? Was muss beim Ausbau des Netzes beachtet werden, um die Sychronisierbarkeit des Netzes nicht zu gefährden? Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch [1, 2].
- Untersuchen Sie analytisch und numerisch zwei gekoppelte Oszillatoren (Gl. 3 in [1]).
- Wählen Sie einen der vier Netzbetreiber in Deutschland aus und untersuchen Sie, wie sich eine Dezentralisierung in dem von Ihnen ausgewählten Netz auswirken würde.
- Erklären Sie das Braess-Paradoxon. Führen Sie nach dem Zufallsprinzip 10 Links in Ihrem Netzwerk ein. Welche gefährden die Synchronization?

Literatur

[1] M. Rohden, A. Sorge, M. Timme, and D. Witthaut: *Self-organized synchronization in decentralized power grids*, Phys. Rev. Lett. **109**, 064101 (2012).

[2] D. Witthaut and M. Timme: *Braess's paradox in oscillator networks, desynchronization and power outage*, New Journal of Physics **14**, 083036 (2012).

Projekt 8: *Seuchenausbreitung*

Betreuer: Vitaly Belik (`vitaly.belik@campus.tu-berlin.de`, EW633)

Um die räumliche Seuchenausbreitung mathematisch zu beschreiben, bedient man sich sogenannter Reaktion-Diffusion-Modelle. Dabei wird angenommen, dass an jedem Ort die Wirte gut durchgemischt sind und die Ansteckung nach den Gesetzen der chemischen Reaktionskinetik stattfindet. Die Bewegungen der Wirte können entweder als Diffusion [1] oder wiederkehrende Bewegungen [2] beschrieben werden.
Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Leiten Sie basierend auf der Gesetzen der Chemischen Kinetik die drei Modelle der mathematischen Epidemiologie (*SI*, *SIS*, *SIR*) und untersuchen Sie die Fixpunkte und dessen Statbilität. S steht für Suszeptible, I für Infizierte, R für *removed* oder *recovered*.
- Unter der Annahme der diffusiven Bewegungen der Wirte auf einer Kette der Orten und SI-Dynamik leiten Sie die Fisher-Kolmogorov-Gleichung her. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Seuchenwelle.
- Leiten Sie die Reaktion-Diffusion-Gleichung auf einer eindimensionalen Kette für den Fall der wiederkehrenden Bewegungen her. Dabei nimmt man an, dass die Suszeptiblen nicht reisen können. Berechnen sie die Geschwindigkeit der Welle in Anhängigkeit der Parameter. Ist es möglich, die Suszeptiblen auch reisen zu lassen?
- Implementieren sie eine deterministische Reaktion-Diffusion-Dynamik auf dem Gitter (ein- und zweidimensional). Dazu muss man numerisch die partiellen Differenzialgleichungen lösen. Versuchen Sie ein Video zu erzeugen, wo man die Epidemiewellen für beide Fälle sich ausbreiten sehen kann.

Literatur

[1] J. D. Murray: *Mathematical Biology: I. An Introduction*, Interdisciplinary Applied Mathematics (Springer, 2002).

[2] V. Belik, T. Geisel, and D. Brockmann: *Natural human mobility patterns and spatial spread of infectious diseases*, Phys. Rev. X **1**, 011001 (2011).

Projekt 9: *Skalenfreie und small-world Netzwerke*

Betreuer: Vitaly Belik (`vitaly.belik@campus.tu-berlin.de`, EW633)

Unter den vielen verschiedenen Arten von Netzwerken spielen die sog. *small-world* Netzwerke eine zentrale Rolle [1, 2, 3, 4]. Sie zeichnen sich durch kurze Wege zwischen den Elementen und einen hohen Cluster-Koeffizienten aus. Ihre charakteristische Struktur ist in unterschiedlichen Bereichen nachgewiesen worden, wie zum Beispiel in biologischen oder sozialen Netzwerken. In sozialen Netzwerken zeigt sich die *small-world* Eigenschaft in dem Pänomen, dass jeder Mensch mit jedem anderen über höchstens sechs Verbindungen miteinander bekannt ist.
Andererseits zeigen viele uns umgebende Netzwerke (z.B. das Internet oder das Flugliniennetz) skalenfreie Eigenschaften [5]. Dabei bezieht sich die Bezeichnung *skalenfrei* auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Knotengrades (Zahl der Verbindungen zu anderen Knoten). In diesem Projekt sollen Wachstumsmodelle diskutiert werden, die zur Entstehung solcher skalenfreien Netzwerke führen.
Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Diskutieren Sie verschiedenen Kenngroßen, die ein Netzwerk charakterisieren (Grad eines Knotens, durchschnittliche Verbindung, Cluster-Koeffizienten etc.). Unterscheiden Sie dabei vor allem zwischen zufälligen, regulären, *small-world* und skalenfreien Netzwerken.
- Wie können small-world Netzwerke erzeugt werden? Nennen Sie mindestens drei Beispiele aus unterschiedlichen Gebieten, wo *small-world* Netzwerke zu finden sind. Diskutieren Sie die Anfälligkeit eines Netzwerks in Hinblick auf seinen vollständigen Zusammenhang unter dem Einfluss von zufälligem oder koordiniertem Ausfall von Netzwerkelementen.
- Berechnen Sie für ein mindestens 100 Knoten großes *small-world* Netzwerk die mittlere kürzeste Weglänge und den Cluster-Koeffizienten. Finden Sie einen möglichst effizienten Algorithmus. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem analytischen Ausdruck für Cluster-Koeffizienten [4] und vollziehen Sie die Herleitung dieses Ausdruckes nach.
- Zeigen Sie, dass beim Wachstumsmodell von Price oder von Barabasi und Albert [2] ein skalenfreies Netzwerk entsteht. Stellen Sie dazu die Mastergleichung auf und lösen diese. Diskutieren sie mögliche Modifizierungen der Modelle und deren Einfluss auf die resultierenden Potenzgesetzverteilungen. Was kann man daraus über reale Netzwerke lernen?

Bitte nächste Seite beachten!⟶

Literatur

[1] D. J. Watts and S. H. Strogatz: *Collective dynamics of 'small-world' networks*, Nature **393**, 440 (1998).

[2] M. E. J. Newman: *The structure and function of complex networks*, SIAM Review **45**, 167 (2003).

[3] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D. U. Hwang: *Complex networks: Structure and dynamics*, Phys. Rep. **424**, 175 (2006).

[4] R. Albert and A. L. Barabasi: *Statistical mechanics of complex networks*, Rev. Mod. Phys. **74**, 47 (2002).

[5] A. L. Barabasi and E. Bonabeau: *Scale-free networks*, Sci. Am. **288**, 50 (2003).