

Prof. Dr. Andreas Knorr
 Dr. Heiko Appel
 Dr. Marten Richter

3. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Theoretische Optik

Abgabe: Bis Mo. 19.05.2014 in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe erfolgt in Dreier- oder Vierergruppen.

Aufgabe 1 (8 Punkte): Vertauschungsrelationen für Fermionen und Bosonen

Beweisen Sie analog zu dem Beispiel aus der Vorlesung (also durch Anwendung auf einen Fock Zustand) die Vertauschungsrelationen für Vielteilchen Erzeuger und Vernichter im Fall von

1. Fermionen $[a_i, a_j]_+ = 0$, $[a_i^\dagger, a_j^\dagger]_+ = 0$, $[a_i, a_j^\dagger]_+ = \delta_{i,j}$
2. Bosonen $[c_i, c_j]_- = 0$, $[c_i^\dagger, c_j^\dagger]_- = 0$, $[c_i, c_j^\dagger]_- = \delta_{i,j}$.

Aufgabe 2 (8 Punkte): Hamiltonoperatoren in zweiter Quantisierung

Zeigen Sie für Einteilchen Operatoren, dass die Summe von Einteilchen Hamiltonians in erster Quantisierung

$$\hat{H}^1 = \sum_{i=1}^N \hat{h}(\mathbf{x}_i) \quad (1)$$

in zweiter Quantisierung für Fermionen in folgender Form geschrieben werden kann

$$\hat{H}^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} \int d\mathbf{x} \phi_i^*(\mathbf{x}) \hat{h}(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) a_i^\dagger a_j \quad (2)$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor: Wählen Sie zwei beliebige Basiselemente $|\Phi_b\rangle$ und $|\Phi_c\rangle$ die aus der gleichen Basis orthonormalen Einteilchenfunktionen konstruiert wurde. Zeigen Sie dann, dass für alle Fälle $\langle \Phi_b | H^1 | \Phi_c \rangle$ und $\langle \Phi_b | H^2 | \Phi_c \rangle$ das gleiche ergeben. Dabei können Sie die folgender Identität für beliebige Vielteilchenoperatoren B benutzen

$$\int d^N x \Phi_b^* \hat{B} \Phi_c = \sqrt{N!} \int d^N \mathbf{x} \Phi_b^*(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \hat{B} \phi_{c_1}(\mathbf{x}_1) \cdots \phi_{c_N}(\mathbf{x}_N). \quad (3)$$

Bemerkung: auch wenn der Fall in der Aufgabe nur für Fermionen gezeigt wird, sind die Formeln für den Übergang von erster in zweiter Quantisierung für Bosonen gleich.