Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Heiko Appel
Dr. Marten Richter

# 6. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Theoretische Optik

**Abgabe: Bis Mo. 16.06.2014 in der Übung**

*Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe erfolgt in Dreier- oder Vierergruppen.*

**Aufgabe 1 (27 Punkte):** *Spektroskopie mit Responsefunktion*

In der Übung wurde zur Beschreibung der optischen Antwort eines Systems der Responsefunktionenformalismus eingeführt. Ferner wurde die $L$, $R$ und $+$ , $-$ Algebra in der Übung eingeführt. Dieser wird auf diesem Übungsblatt geübt.

Wir betrachten ein Zweiniveausystem bestehend aus dem unteren Niveau $|1\rangle$ und dem oberen Niveau $|2\rangle$. Beide Zustände seien Eigenzustände zum $H_0$, ferner haben wir einen Lindbladoperator $\mathcal{L}$ zur Beschreibung von Puredephasing eingeführt.

Dabei ist $(-\frac{\imath}{\hbar}H_{0,-} + \mathcal{L})|1\rangle\langle 1| = 0$, $(-\frac{\imath}{\hbar}H_{0,-} + \mathcal{L})|2\rangle\langle 2| = 0$ und $(-\frac{\imath}{\hbar}H_{0,-} + \mathcal{L})|1\rangle\langle 2| = (\frac{\imath}{\hbar}E_g - \gamma)|1\rangle\langle 2|$ sowie $(-\frac{\imath}{\hbar}H_{0,-} + \mathcal{L})|2\rangle\langle 1| = (-\frac{\imath}{\hbar}E_g - \gamma)|2\rangle\langle 1|$ mit der Übergangsenergie $E_g$ und dem homogenen Dephasing $\gamma$.

Der Wechselwirkungshamiltonian in RWA ist gegeben als $H_{int} = d^*\hat{E}(\mathbf{r},t)e^{-\imath\omega_L t} + d\hat{E}^*(\mathbf{r},t)e^{\imath\omega_L t}$ mit $d = d_{12}|1\rangle\langle 2|$. Hier bei ist $\hat{E}$ die komplexe Feldamplitude.

1. **Lineare Optik**: Wir regen das System mit einem $\delta$- Puls zur Zeit $t_1$ (also $\hat{E}(\mathbf{r},t) = E_1\delta(t-t_1)e^{\imath\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}+\imath\omega_L t}$) an. Berechnen Sie den linearen Anteil der Polarisation
$$P^{(1)*}(0,t) = -\theta(t-t_1)E_1^*(\frac{\imath}{\hbar}\mathrm{tr}(d_L^*(t)d_R(t_1)\rho). \tag{1}$$
für dieses System.

2. Führen Sie eine Fouriertransformation in der Zeit durch und plotten sie Real- und Imaginärteil des Ergebnisses. Vergleichen Sie das Ergebnis mit Übungsblatt 4.

3. *inhomogene Linienbreite:* In einem optischen Experiment wird meist nicht ein einzelnes System gemessen sondern viele leicht unterschiedliche Systeme.
In dem Fall variert die Übergangsenergie $E_{g,n}$ des Einzelsystems leicht $E_{g,n} = E_g + \Delta E_n$.
Die Gesamtpolarisation ist dabei: $P_g^{(1)}(0,t) = \sum_n P_n^{(1)}(0,t)$.
Berechnen Sie die Gesamtpolarisation unter Verwendung des Ergebnisses von 1. Führen Sie die Größe $D(\Delta E) = \sum_n \delta(\Delta E - \Delta E_n)$ und drücken Sie ihr Ergebnis mit Hilfe von $D(\Delta E)$.

4. Berechnen Sie analytisch $P_g^{(1)}(0,t)$ für $D(\Delta E) = Ne^{-(\Delta E)^2/(2\sigma^2)}$, (lösen Sie insbesondere das Integral über $\Delta E$ und interpretieren Sie die Formel.

5. Plotten Sie für dieses $D(\Delta E)$ dann $P_g^{(1)}(0,\omega)$ für $\hbar\gamma << \sigma$, $\hbar\gamma = \sigma$, $\hbar\gamma >> \sigma$. Interpretieren Sie das Ergebnis, welchen Effekte hat die inhomogene Verteilung der Übergangsfrequenzen?

6. **Photonecho**: Wir betrachten jetzt ein Photonechoexperiment ein typischer Vertreter eines Vierwellenmischexperimentes. Hier wird eine Sequenz aus drei Pulsen auf die Probe geschickt (Näherungsweise als $\delta$ Pulse:
$$\hat{E}(\mathbf{r},t) = E_1\delta(t-t_1)e^{\imath\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}+\imath\omega_L t} + E_2\delta(t-t_2)e^{\imath\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r}+\imath\omega_L t} + E_3\delta(t-t_3)e^{\imath\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{r}+\imath\omega_L t}. \tag{2}$$
Die Pulse sind zeitlich geordnet mit $t > t_3 > t_2 > t_1$. Der Detektor wird in Richtung $\mathbf{k}_S = -\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1$ aufgestellt, es tragen daher nur Terme mit $e^{\imath\mathbf{k}_S\cdot\mathbf{r}}$ bei. Leiten Sie dass

Photonechosignal in dritter Ordnung in der Wechselwirkung her:

$$P^{(3)}_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3}(\mathbf{r},t) = \left(-\frac{\imath}{\hbar}\right)^3 E_3^* E_2^* E_1 e^{\imath(-\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{r}} \mathrm{tr}(d_L^*(t) d_-(t_3) d_-(t_2) d_-^*(t_1)\rho). \tag{3}$$

7. Machen Sie sich klar, dass $d_R(t_3)d_R(t_2) = 0$ und $d_R^*(t_1)|1\rangle\langle 1| = 0$ verwenden Sie dieses um zu zeigen, dass:

$$\begin{aligned} P^{(3)*}_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3}(\mathbf{r},t) &= -\left(-\frac{\imath}{\hbar}\right)^3 E_3^* E_2^* E_1 e^{\imath(-\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{r}} \left(\mathrm{tr}(d_L^*(t) d_L(t_3) d_R(t_2) d_L^*(t_1)\rho)\right. \\ &\quad \left. + \mathrm{tr}(d_L^*(t) d_R(t_3) d_L(t_2) d_L^*(t_1)\rho)\right). \end{aligned} \tag{4}$$

8. Zeigen Sie, dass das Photonechosignal die Form:

$$P^{(3)*}_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3}(\mathbf{r},t) \propto -\left(-\frac{\imath}{\hbar}\right)^3 E_3^* E_2^* E_1 e^{\imath(-\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{r}} e^{(\imath E_g/\hbar-\gamma)(t-t_3)} e^{(-\imath E_g/\hbar-\gamma)(t_2-t_1)} \tag{5}$$

annimmt.

9. *inhomogene Linienbreite:* Berechnen Sie das Photonechosignal für ein Ensemble (analog zur linearen Optik) $P^{(3)*}_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3,g}(\mathbf{r},t) = \sum_n P^{(3)*}_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3,n}(\mathbf{r},t)$. Drücken Sie den Ausdruck für das Signal wieder mit Hilfe von $D(\Delta E)$ aus und lösen Sie ferner das Integral über $\Delta E$. Erkennen Sie in dem Signal sowas wie ein Echo oder Peak bei einer bestimmten Zeit?

10. Betrachten Sie den Fall das der zeitliche Abstand zwischen Pulse 1 und 2 und Puls 3 und der Detektion jeweils $\tau$ ist. (d.h. $\tau = t_2 - t_1$, $\tau = t - t_3$). Erwarten Sie für den Fall noch einen Einfluß von $\sigma$ also von der inhomogenen Verteilung? Was scheint der Vorteil des Photonechos zu sein?