

Prof. Dr. Andreas Knorr
 Dr. Heiko Appel
 Dr. Marten Richter

8. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Theoretische Optik

Abgabe: Bis Mo. 30.06.2014 in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe erfolgt in Dreier- oder Vierergruppen.

Aufgabe 1 (13 Punkte): Propagation geschirpter Pulse

Im Experiment verwendete Pulse $\tilde{E}(\zeta, \eta)$ sind oft stark entfernt von einer idealen Gaußform. Daher ist es bei vielen Experimenten notwendig, eine zeitabhängige Trägerfrequenz (Chirp) mitzubersichtigen. Wir betrachten für die Einhüllende $\tilde{E}(\zeta, \eta)$ die Wellengleichung mit Gruppengeschwindigkeitsdispersion:

$$\partial_\zeta \tilde{E}(\zeta, \eta) + \frac{1}{2} k_L'' \partial_\eta^2 \tilde{E}(\zeta, \eta) = 0 \quad (1)$$

Wir führen die Fouriertransformation $\tilde{E}(\zeta, \omega)$ der Einhüllenden ein als:

$$\tilde{E}(\zeta, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i(\omega - \omega_l)\eta} \tilde{E}(\zeta, \omega) d\omega. \quad (2)$$

1. Zeigen Sie, dass die Wellengleichung für die Fouriertransformierte die Form:

$$\partial_\zeta \tilde{E}(\zeta, \omega) - \frac{1}{2} k_L'' (\omega - \omega_l)^2 \tilde{E}(\zeta, \omega) = 0 \quad (3)$$

annimmt und dass die allgemeine Lösung die Form $\tilde{E}(\zeta, \omega) = \tilde{E}(0, \omega) e^{+ik_L'' \Delta\omega^2 \zeta / 2}$ besitzt mit $\Delta\omega = \omega - \omega_l$.

2. Wir betrachten im weiteren den Startpuls $\tilde{E}(0, t) = A_0/2 e^{-\gamma_0 t^2} e^{+i\beta_0 t^2}$. Wie verhält sich die Trägerfrequenz für steigende Zeiten t ? Zeigen Sie ferner, dass die Fouriertransformierte die Form $\tilde{E}(0, \omega) = \sqrt{\pi}/2 A_0 / \sqrt{\gamma_0 - i\beta_0} e^{-\Delta\omega^2/4/(\gamma_0 - i\beta_0)}$ besitzt.
3. Zeigen Sie, dass der Gesamtausdruck für das elektrische Feld die folgende Form hat:

$$\tilde{E}(\zeta, \eta) = \frac{1}{2} A_0 \frac{1}{\sqrt{-2ik_L'' \zeta (\gamma_0 - i\beta_0) + 1}} e^{-\frac{\eta^2 (\gamma_0 - i\beta_0)}{-2ik_L'' \zeta (\gamma_0 - i\beta_0) + 1}} \quad (4)$$

4. Im Experiment wird in der Regel nicht das elektrische Feld, sondern die Intensität gemessen. Zeigen Sie, dass gilt:

$$|E(\zeta, \eta)|^2 = \frac{1}{4} |A_0|^2 \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \delta^2}} e^{-\eta^2 \left(\frac{\gamma_0 \alpha + \beta_0 \delta}{\alpha^2 + \delta^2} \right)} \quad (5)$$

mit $\alpha = -2k_L'' \beta_0 \zeta + 1$ und $\delta = 2k_L'' \gamma_0 \zeta$.

5. Zur Interpretation ist es hilfreich eine zeitabhängige Pulsbreite $\gamma(\zeta)$ und eine zeitabhängige Amplitude $A_0(\zeta)$ so einzuführen, dass wir die Form:

$$|E(\zeta, \eta)|^2 = \frac{1}{4} A_0^2(\zeta) e^{-\gamma(\zeta) \eta^2} \quad (6)$$

erhalten. Wobei $\gamma(\zeta) = \gamma_0/g(\zeta) = 1/\tau_L^2(\zeta)$. Zeigen Sie, dass $g(\zeta) = (1 - 2k_L'' \beta_0 \zeta)^2 + (2k_L'' \gamma_0 \zeta)^2$ und $A_0^2(\zeta) = A_0^2 \tau_L(0)/\tau_L(\zeta)$ gilt.

6. Interpretieren Sie das Ergebnis. Zeigen Sie dazu, dass $\tau_L(\zeta)/\tau_L(0) = (1 - 2\beta_0 k_L'' L_D (1 - (1 - \frac{\zeta}{L_D})^2))^{1/2}$ gilt. Hierbei ist $L_D = \frac{\beta_0}{2k_L''} \frac{1}{\beta_0^2 + \gamma_0^2}$ die Dispersionslänge.

6a Zeigen Sie, dass für kleine ζ gilt $\tau_L(\zeta) = \tau_L(0)(1 - 2k_L'' \beta_0 \zeta)$.

6b Zeigen Sie, dass für große $\tau_L \propto \zeta$ gilt. Bestimmen Sie die Proportionalitätskonstante.