Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H.-H. v. Borzeszkowski
Dr. T. Chrobok

15. Juni 2015

8. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Montag 29.06.15 vor der Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte): ***Grundbegriffe der Feldtheorie anhand der Klein-Gordon-Gleichung***

Betrachten Sie die Lagrange-Dichte eines relativistischen spinlosen Feldes (Klein-Gordon-Feld)

$$\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}(\Psi^*_{,m}\Psi^{,m} + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\Psi^*\Psi) = -\frac{\hbar^2}{2m_0}(grad\Psi^* grad\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\Psi^*\Psi) \quad (1)$$

worin Ψ die Feldfunktion bzw. Ψ^* die komplex-konjugierte Feldfunktion sind.
a) Bestimmen Sie aus der Lagrangedichte (1) die Impulsfunktion und die kanonisch konjugierten Impulse $\Pi^K = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial U_K}{\partial t})}$ und $\Pi^{Ki} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U_{K,i}}$.
b) Leiten Sie die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U} - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U_{,m}}\right)_{,m} = 0$$

für die Felder Ψ und Ψ^* ab (Klein-Gordon-Gleichung).
c) Benutzen Sie die in b) gewonnenen Ergebnisse um die Kontinuitätsgleichung

$$(\Psi^*\Psi^{,i} - \Psi^{*,i}\Psi)_{,i} = 0$$

für das Klein-Gordon-Feld abzuleiten.
d) Bestimmen Sie die Hamiltonsche-Dichte $\mathcal{H} = \Pi^K\frac{\partial U_K}{\partial t} - \mathcal{L}$ des Klein-Gordon-Feldes.
e) Berechnen Sie den kanonischen Energie-Impuls-Tensor $\mathcal{T}^i_j = \Pi^{Ki}U_{K,j} - \mathcal{L}g^i_j$ des Klein-Gordon-Feldes, und zeigen Sie, dass dieser symmetrisch ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte): ***Poisson-Klammern der Feldtheorie***

Betrachten Sie die Integraldarstellung der Feldfunktionen

$$U_K(x^\mu, t) = \int_{V_3} U_K(\xi^\mu, t)\delta^{(3)}(x^\mu - \xi^\mu)d^{(3)}\xi$$

und der Integraldarstellung der Feldimpulsfunktionen

$$\Pi^K(x^\mu, t) = \int_{V_3} \Pi^K(\xi^\mu, t)\delta^{(3)}(x^\mu - \xi^\mu)d^{(3)}\xi.$$

Hierin bezeichnet $\delta^{(3)}$... die dreidimensionale Deltadistribution. Die Poissonklammer von zwei Feldfunktionalen F, G ist definiert durch

$$[F, G] = \int_{V_3}\left(\frac{\eth F}{\eth U_M}\frac{\eth G}{\eth \Pi^M} - \frac{\eth G}{\eth U_M}\frac{\eth F}{\eth \Pi^M}\right)d^{(3)}\xi,$$

wobei das Ableitungssymbol $\eth$ als Funktionalableitung zu verstehen sind.
a) Bestimmen Sie die folgenden fundamentalen Poissonklammern

$$[U_K(x^\mu, t), U_L(\bar{x}^\mu, t)],$$
$$[\Pi^K(x^\mu, t), \Pi^L(\bar{x}^\mu, t)],$$
$$[U_K(x^\mu, t), \Pi^L(\bar{x}^\mu, t)].$$

b) Bestimmen Sie die Poissonklammern

$$[F, U_L(\bar{x}^\mu, t)],$$
$$[F, \Pi^L(\bar{x}^\mu, t)]$$

für eine beliebige Größe F.