

4. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Montag 01.06.15 vor der Übung

Aufgabe 1 (4 Punkte): Energie-Impuls-Tensor einer Gravitationswelle I

Zeigen Sie, dass der in der Vorlesung eingeführte Energie-Impuls-Tensor einer Gravitationswelle

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G} (R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} R)^{(2)}) \quad (1)$$

im Falle einer quellenfreien Lösung, äquivalent zu

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{16\pi G} (2R_{\mu\nu}^{(2)} - \eta_{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}^{(2)}) \quad (2)$$

ist. Bitte beachten Sie dabei, dass man in der linearen Näherungen rechnet und eine **freie** Gravitationswelle beschreibt.

Aufgabe 2 (6 Punkte): Energie-Impuls-Tensor einer Gravitationswelle II

Nach der in der 1. Aufgabe berechneten Abhängigkeit des Energie-Impuls-Tensors der freien Gravitationswelle vom Ricci-Tensor 2. Ordnung ist nun dessen Bestimmung notwendig.

a) Zeigen Sie, dass

$$R_{\mu\kappa}^{(2)} = \eta^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa}^{(2)} - h^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa}^{(1)} \quad (3)$$

für $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ bzw. $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ gilt!

b) Zeigen Sie mit Hilfe von Gleichung (3), der Definition des Krümmungstensors

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} (g_{\lambda\nu, \mu\kappa} + g_{\mu\kappa, \lambda\nu} - g_{\mu\nu, \lambda\kappa} - g_{\lambda\kappa, \mu\nu}) + g_{\eta\sigma} (\Gamma_{\nu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} - \Gamma_{\kappa\lambda}^{\eta} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}) \quad (4)$$

und den Christoffelsymbolen 1. Ordnung (Warum?)

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} (h^{\sigma}_{\mu, \nu} + h^{\sigma}_{\nu, \mu} - h_{\mu\nu, \sigma}), \quad (5)$$

dass der Ricci-Tensor 2. Ordnung die Form

$$R_{\mu\kappa}^{(2)} = -\frac{1}{4} (h_{\sigma\kappa, \nu} + h_{\sigma\nu, \kappa} - h_{\kappa\nu, \sigma}) (h_{\mu}^{\sigma, \nu} + h^{\sigma\nu}_{, \mu} - h_{\mu}^{\nu, \sigma}) - \frac{h^{\lambda\nu}}{2} (h_{\lambda\nu, \mu\kappa} + h_{\mu\kappa, \lambda\nu} - h_{\mu\nu, \lambda\kappa} - h_{\lambda\kappa, \mu\nu}). \quad (6)$$

hat. Es ist dabei zu beachten, dass $h_{\mu\nu}$ Lösung der freien Wellengleichung ist für die die Eichbedingung $2h^{\nu}_{\mu, \nu} = h^{\nu}_{\nu, \mu}$ gilt. Ansonsten ruhig bleiben und Terme höherer Ordnung vernachlässigen.