

English summary

1. Introduction

Basic notations/vocabulary:

prevalence: # infected at a given point in time (\rightarrow point prevalence)
(also as period prevalence for a period of time)

incidence: # new infected

incidence rate: $\frac{\text{incidence}}{\text{time interval} \cdot \text{population size}}$ (e.g. $\frac{x \text{ infected}}{1 \text{ year} \cdot 10^5 \text{ people}}$)

endemic: disease maintained in a population (without external influences)
(\rightarrow background sickness/level)

epidemic: rapid spread to large # of people in a given population
(\gg endemic prevalence, locally restricted/confined)

pandemic: spread through large regions (across countries/continents)

non linear dynamics: full of unexpected effects

- strong reduction of pathogens \Rightarrow only small reduction of prevalence
- (insufficient) vaccination might increase severity of a disease
- development of resistant strains

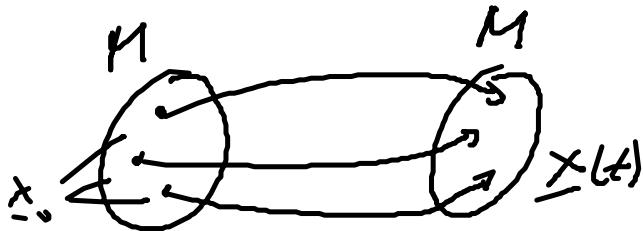
1.1 Dynamische Systeme

Dynamik vieler Systeme lässt sich als System (nichtlinearer) Differenzialgleichungen beschreiben:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{F}(\underline{x}(t), t) \quad \begin{array}{l} \underline{x} \in \mathbb{R}^n \text{ dynamische Variable} \\ \underline{F}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ Vektorfeld} \end{array}$$

Fluss des Vektorfeldes \underline{F} auf der Mannigfaltigkeit M (Phasenraum z.B. \mathbb{R}^n)

$$\phi: M \times \mathbb{R}_t \rightarrow M \quad \text{mit} \quad \phi(\underline{x}_0, t) = \phi_t(\underline{x}_0) = \underline{x}(t; \underline{x}_0) \quad \text{Anfangsbedingung}$$



Gesamtheit der Trajektorien

$$\phi_s(\phi_t(\underline{x}_0)) = \phi_{s+t}(\underline{x}_0)$$

Fixpunkt \underline{x}^* eines autonomen dynamischen Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$:

stationäre Punkte, Gleichgewichtspunkte, singuläre Punkte, kritische Punkte

$0 \stackrel{!}{=} \dot{\underline{x}} \Rightarrow \underline{F}(\underline{x}^*) = 0 \Rightarrow$ Bestimmung von \underline{x}^* in Abhängigkeit der Systemparameter

z.B.: Gesundheitszustand (alle gesund $\hat{=}$ keine Erkrankungen)

Stabilität eines Fixpunktes:



stabil



instabil



indifferent

Test der Stabilität durch Linearisierung (für kleine Auslenkungen $\underline{\delta x} = \underline{x} - \underline{x}^*$)

$$\dot{\delta x}_i = \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right|_{\underline{x}^*} \delta x_k$$

\Leftrightarrow

$$\dot{\underline{\delta x}} = \left(\underline{DF} \right)_{\underline{x}^*} \underline{\delta x}$$

mit Jacobi-Matrix \underline{DF}

$$\underline{\delta \dot{x}} = \dot{\underline{x}} - \dot{\underline{x}}^* = \underline{F}(\underline{x}) - \underbrace{\underline{F}(\underline{x}^*)}_{=0} \approx \left(\underline{DF} \right)_{\underline{x}^*} \underbrace{(\underline{x} - \underline{x}^*)}_{\underline{\delta x}} \quad (\text{Taylor-Entwicklung})$$

\Rightarrow System von linearen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Lösungsansatz: $\underline{x}(t) = \underline{f} e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda \underline{f} = \underline{A} \underline{f}$ (Eigenwertgl.)

λ_k : Eigenwerte

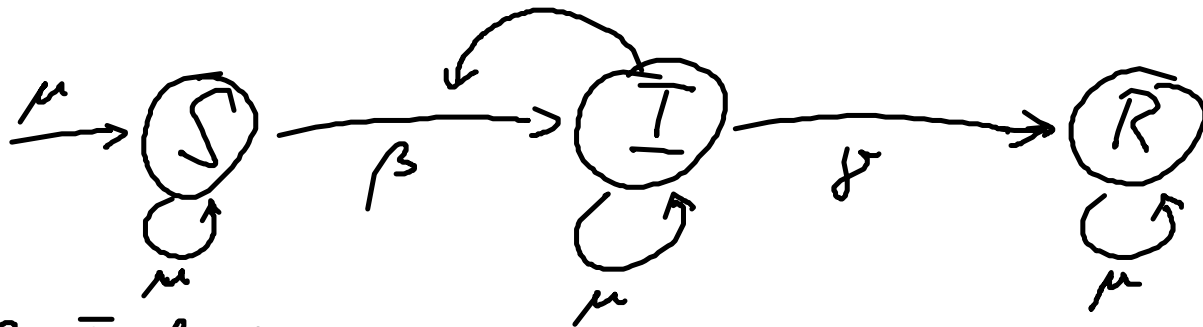
$\underline{f}^{(k)}$: Eigenvektoren

der Jacobi-Matrix $\left(\frac{DF}{dx}\right)_{xx} = \underline{A}$

allgemeine Lösung: $\underline{x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \underline{f}_k e^{\lambda_k t}$

lineare Stabilität, wenn die Realteile aller Eigenwerte negativ sind.

Bsp.: SIR-Modell mit Demographie (Geburts-/Sterbeprozesse)



Susceptible (gesund)
Infected (erkrankt)
Recovered (erholt)

β : Infektionsrate

μ : Sterberate

γ : Genesungsrate

gesunde Geburt

$$\frac{dS}{dt} = \underbrace{\mu}_{\text{gesunde Geburt}} - \underbrace{\beta SI} - \underbrace{\mu S}$$

Anstreuung natürlicher Sterbeprozesse

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \underbrace{\gamma I}_{\text{Genesung}} - \mu I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \quad \text{Konstante Gesamtpopulation}$$

Beobachtung: $\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = \mu(1 - S - I - R) = 0$

S, I, R sind der Anteil der Gesunden, Erkrankten bzw. Erkranken in der Gesamtpopulation

Bem.: - Details zur Herleitung in Kapite 2

- Anstreuung in Abhängigkeit von S und $I \Rightarrow$ Nichtlinearität

Fall 1: $\mu = 0 \Rightarrow \dot{S} = -\beta SI, \dot{I} = \beta SI - \gamma I, \dot{R} = \gamma I$

Fixpunkte bestimmen $\dot{S} = \dot{I} = \dot{R} = 0, S, I, R \geq 0$

$$\dot{I} = I(\beta S - \gamma) \Rightarrow I^* = 0 \Rightarrow S, R \text{ konstant}$$

z.B.: $S^* = 1, R^* = 0$ (wegen $S+I+R=1$)

$S(0) < \frac{\beta}{\gamma} \Rightarrow \dot{I} < 0 \Rightarrow$ Krankheit klingt ab

$S(0) > \frac{\beta}{\gamma} \Rightarrow \dot{I} > 0 \Rightarrow$ Ausbruch der Infektionskrankheit

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} : \text{Basic reproduction number/rate}$$

\Rightarrow durchschnittliche Anzahl weiterer Erkrankter ausgehend von einem ersten Fall (in einer (fast) vollständig gesunden Population)

Some Estimated Basic Reproductive Ratios.

Infectious Disease	Host	Estimated R_0
FIV	Domestic Cats	1.1–1.5
Rabies	Dogs (Kenya)	2.44
Phocine Distemper	Seals	2–3
Tuberculosis	Cattle	2.6
Influenza	Humans	3–4
Foot-and-Mouth Disease	Livestock farms (UK)	3.5–4.5

Values of R_0 of well-known infectious diseases^[1]

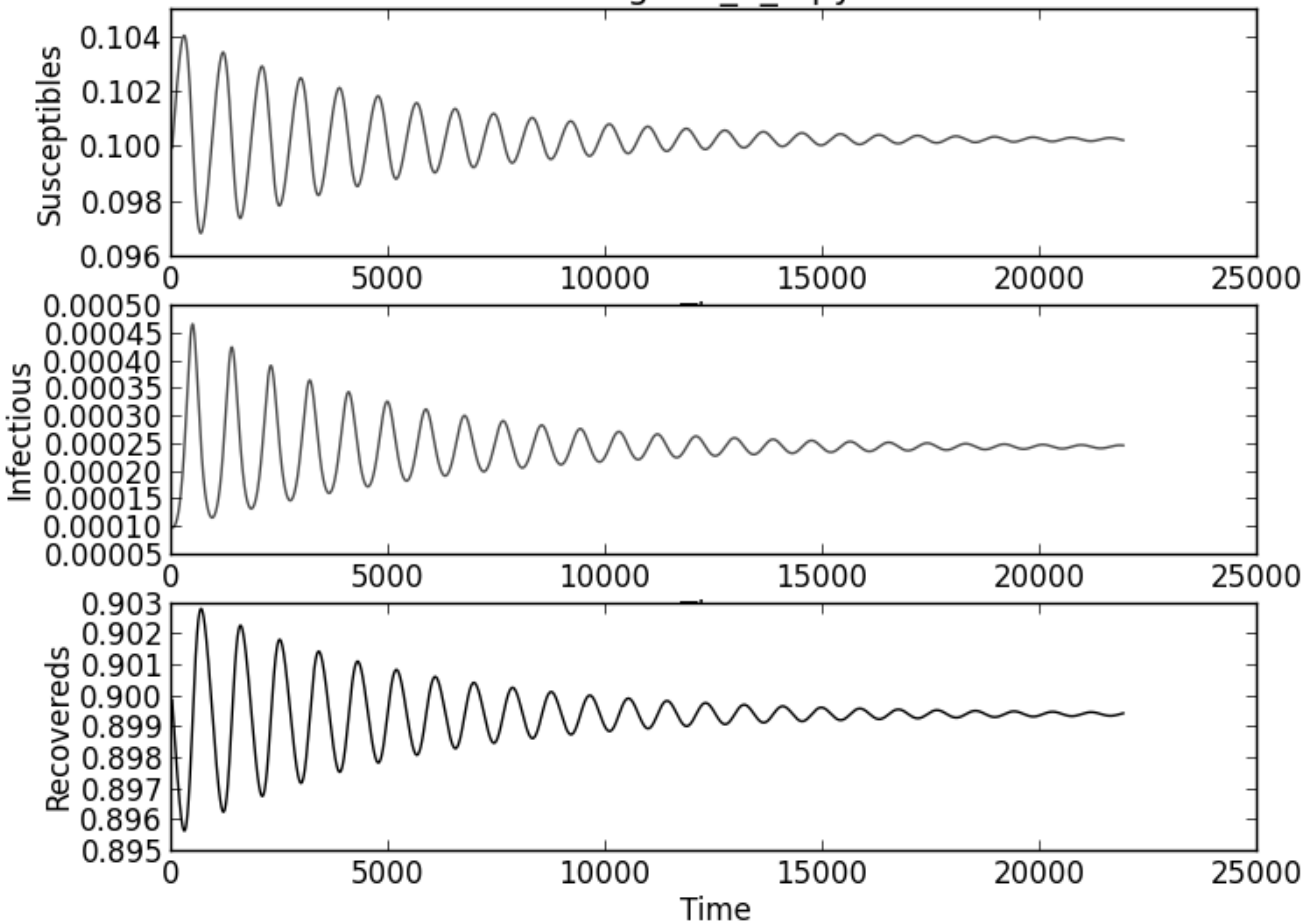
Disease	Transmission	R_0
Measles	Airborne	12–18
Pertussis	Airborne droplet	12–17
Diphtheria	Saliva	6–7
Smallpox	Airborne droplet	5–7
Polio	Fecal-oral route	5–7
Rubella	Airborne droplet	5–7
Mumps	Airborne droplet	4–7
HIV/AIDS	Sexual contact	2–5
SARS	Airborne droplet	2–5 ^[2]
Influenza (1918 pandemic strain)	Airborne droplet	2–3 ^[3]

Smallpox	Humans	3.5–6
Rubella	Humans (UK)	6–7
Chickenpox	Humans (UK)	10–12
Measles	Humans (UK)	16–18
Whooping Cough	Humans (UK)	16–18

Ebola (2014 Ebola outbreak)	Bodily fluids	1.5-2.5 ^[4]
--------------------------------	---------------	------------------------

$\mu \neq 0$

Program_2_2.py

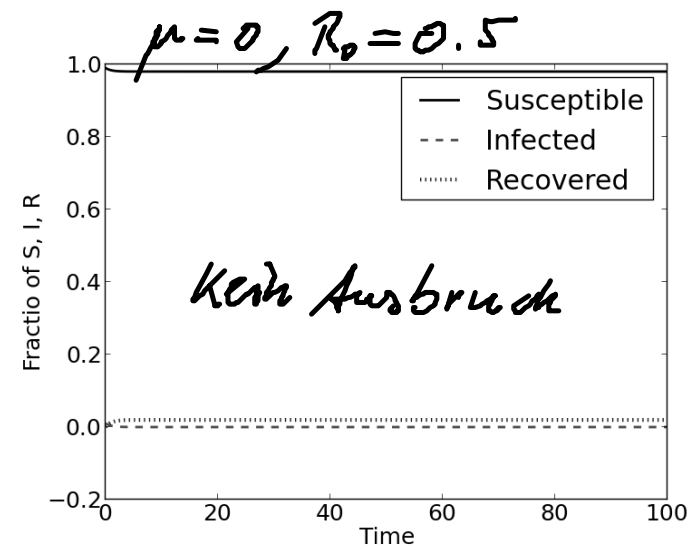
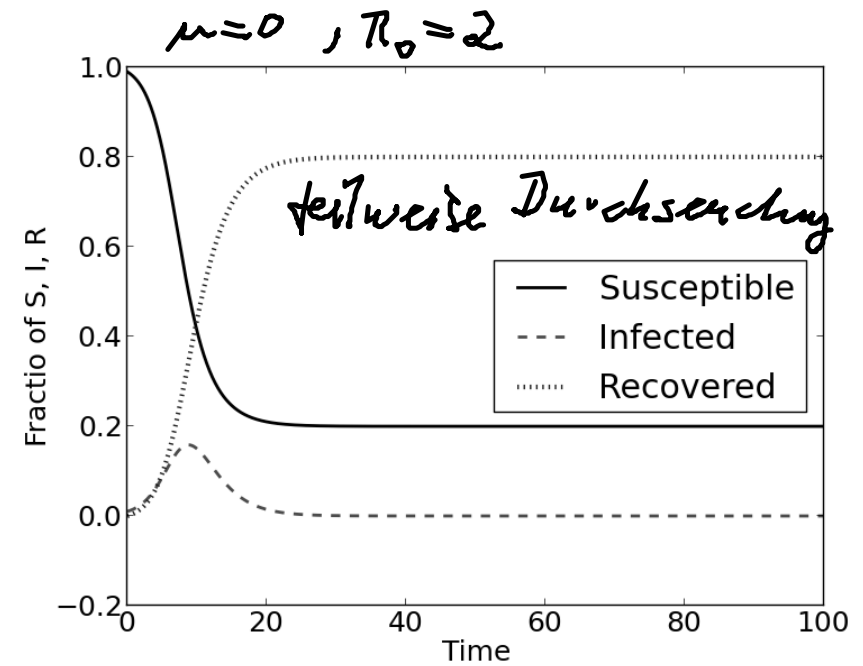
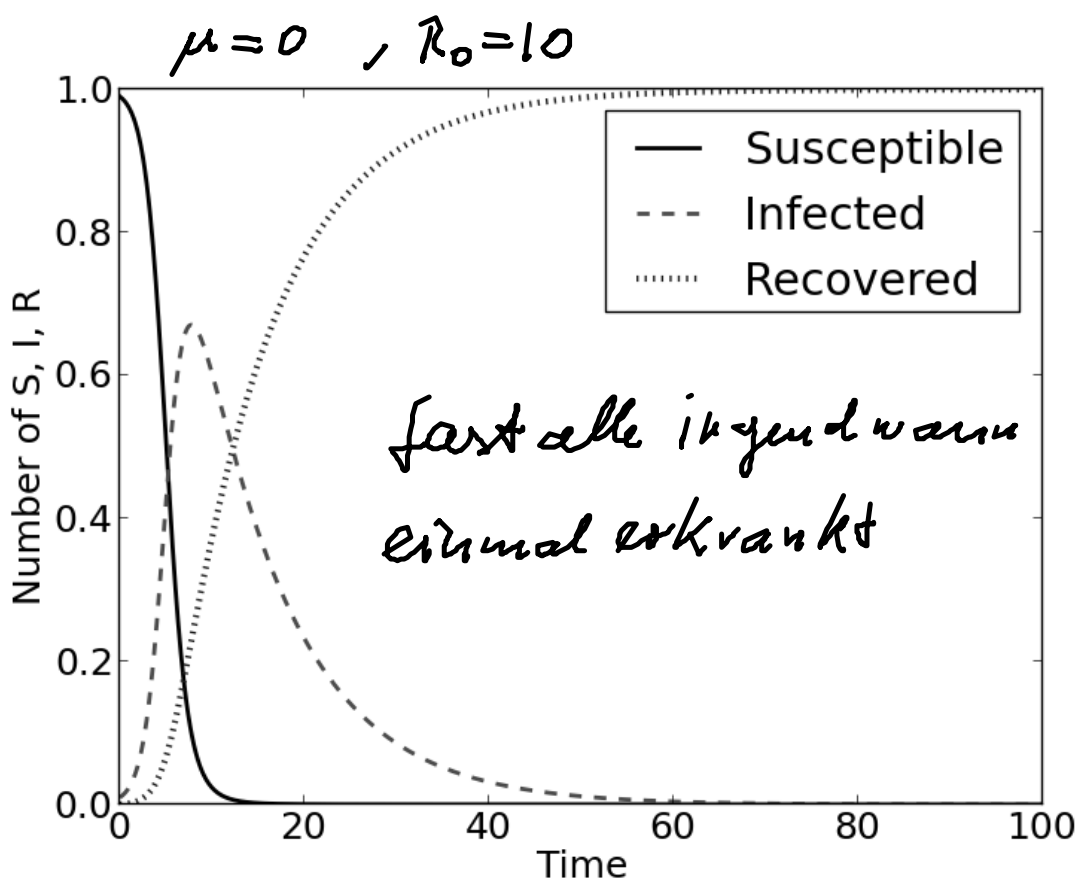


einfache Programm.

icobesource unter

[http://press.princeton.edu](http://press.princeton.edu/titles/8453.html)

/titles/8453.html



Fall 2: $\mu > 0$

$$\dot{S} = \mu - \beta SI - \mu S, \quad \dot{I} = \beta SI - (\mu + \gamma) I, \quad \dot{R} = \gamma I - \mu R$$

$$\dot{I} = 0 \Rightarrow I [\beta S - (\mu + \gamma)] = 0 \Rightarrow R_0 = \frac{\beta}{\gamma + \mu}$$

⇒ Fixpunkte: (i) $I^* = 0$ (Krankheitsfrei)

(ii) $S^* = \frac{\gamma + \mu}{\beta} = \frac{1}{R_0}$ (endemisch, nur für $R_0 > 1$)

$\dot{S} = 0$
⇒ $0 = \mu - \beta S^* I^* - \mu S^* = \dots \Rightarrow I^* = \frac{\mu}{\beta} (R_0 - 1)$

$\dot{R} = 0$
⇒ $0 = \gamma I^* - \mu R^* \Rightarrow R^* = \frac{\gamma}{\mu} (R_0 - 1)$

Stabilitätsanalyse: Eigenwerte der Jacobi-Matrix

$$\underline{Df}|_{\underline{x}^*} = \begin{pmatrix} -\beta I^* - \mu & -\beta S^* & 0 \\ \beta I^* & \beta S^* - (\mu + \gamma) & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu \end{pmatrix}$$

Eigenwerte bestimmen: $\det(\underline{Df}|_{\underline{x}^*} - \lambda \underline{1}) = 0$ (charakteristisches Polynom)

Eigenwerte 3×3 -Einheitsmatrix

Fortsetzung folgt am 29.4.15

Wie lautet die Eigenwert für den Krankheitsfreien
und endemischen Fixpunkt?