

**B: Schrödinger-Gleichung für die Bewegung eines qmT im äußeren Potenzial $U(\underline{r},t)$.
Statistische Interpretation der Wellenfunktion (Max Born, 1927)**

In 1925, Erwin Schrödinger, 'made an educated guess' und postulierte: Für die Bewegung des qmT in $U(\underline{r},t)$ lautet die gesuchte Gleichung für die (i.a. komplexe) Wellenfunktion $\psi(\underline{r},t)$

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\underline{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\underline{r},t) + U(\underline{r},t) \psi(\underline{r},t) \quad \rightarrow \quad \text{Schrödinger-Gleichung} \quad (1.2)$$

• Statistische Interpretation der Wellenfunktion (WF) als Wahrscheinlichkeitsamplitude
(Max Born, 1927):

$$|\psi(\underline{r},t)|^2 d^3r = \psi(\underline{r},t) \psi^*(\underline{r},t) d^3r \quad (1.3)$$

ist die Wahrscheinlichkeit, das qmT zum Zeitpunkt $t \in (t, t + dt)$ im Volumenelement d^3r aufzufinden.

Wegen der statistischen Interpretation interessieren uns nur die normierbaren Lösungen $\psi(\underline{r},t)$ der SG (1.2), für die

$$\int_V d^3r |\psi(\underline{r},t)|^2 = 1 \quad (\text{für alle } t) \quad (1.4)$$

gilt, wobei V der zugängliche Raumbereich ist. Da mit $\psi(\underline{r},t)$ auch $\text{const} \cdot \psi(\underline{r},t)$ Lösung von (1.2), ist die Forderung der Normierbarkeit unproblematisch, solange $\psi(\underline{r},t)$ quadratisch integrabel ist.

Die statistische Interpretation der WF/QM ist eine der Ursachen für die konzeptionellen Schwierigkeiten der QM; ihrer tiefere Analyse führt auf die Unschärfe-Relation, s.u.

• **Statistische Interpretation und Zeitinvarianz**

KM: NBG $m \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = \underline{F}$ für die Bahnkurve $\underline{r}(t)$ ist invariant gegen Zeitumkehr $t \rightarrow -t$. Mit der Bewegung $\underline{r}(t)$ („Film vorwärts“) verstößt auch die Bewegung $\underline{r}(-t)$ („Film rückwärts“) gegen kein einziges Gesetz der KM.

QM: Mit $\psi(\underline{r}, t)$ ist auch $\psi^*(\underline{r}, -t)$ (nicht jedoch $\psi(\underline{r}, -t)$!) Lösung der SG, denn diese ist invariant unter $t \rightarrow -t$ nur bei gleichzeitiger komplexer Konjugation. Damit ist aber die für die Messung relevante Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte invariant gegenüber Zeitumkehr

$$\psi(\underline{r}, t) \psi^*(\underline{r}, t) \xrightarrow{t \rightarrow -t} \psi(\underline{r}, -t) \psi^*(\underline{r}, -t) = \psi^*(\underline{r}, -(-t)) \psi^{**}(\underline{r}, -(-t)) = \psi^*(\underline{r}, t) \psi(\underline{r}, t) ,$$

d.h. auch die SG beschreibt eine reversible Zeitentwicklung.

• **Kontinuitätsgleichung für die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte**

Nach einfachen Umformungen erhält man aus der SG $\frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) = \frac{i\hbar}{2m} \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$ also

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div} \underline{j} = 0 \quad \text{mit } w := \psi^* \psi \quad \text{und } \underline{j} = \frac{i\hbar}{2m} \nabla \cdot (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi). \tag{1.5}$$

Gleichung (1.5) ist die Kontinuitätsgleichung für die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte w , d.h. \underline{j} ist die Wahrscheinlichkeitsstromdichte. Die Kontinuitätsgleichung kann als lokale Formulierung der Normierungsbedingung (Erhaltung der Wahrscheinlichkeit) interpretiert werden.

Beweis Übungsblatt:

FAZIT: Die Gleichungen (1.2) bis (1.4) bilden die Basis der Schrödinger’schen Wellendynamik. Es hat sich gezeigt, dass sie nichtrelativistische Teilchen ohne Spin korrekt beschreiben.

• **Bewegung im zeitunabhängigen Potenzial $U(\underline{r})$**

KM: NBG

$$m \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = -\text{grad} U(\underline{r}) \quad \left| \cdot \frac{d\underline{r}}{dt} \right., \quad m \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\underline{r}}{dt} + \frac{d\underline{r}}{dt} \cdot \text{grad} U(\underline{r}) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d\underline{r}}{dt} \right)^2 + U(\underline{r}) \right] = 0$$

→ Energieerhaltung bei Bewegung im zeitunabhängigen Potenzial.

QM: SG
$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\psi}(\underline{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \tilde{\psi}(\underline{r}, t) + U(\underline{r}) \tilde{\psi}(\underline{r}, t)$$

Lösung durch Trennung der Variablen (Separationsansatz): $\tilde{\psi}(\underline{r}, t) = \psi(\underline{r}) T(t)$

$$i\hbar \psi \frac{dT}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} T \nabla^2 \psi + U \psi T \quad \left| : \psi T \neq 0 \rightarrow \underbrace{i\hbar \frac{1}{T} \frac{dT}{dt}}_{r\text{-unabhängig}} = \frac{1}{\psi} \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U \psi \right)}_{t\text{-unabhängig}} = \text{const} =: E$$

linke Seite: $i\hbar \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = E \rightarrow T(t) = T_0 e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$

Vergleichen wir das mit dem de-Broglie-Postulat $\psi(\underline{r}, t) = \psi_0 e^{i(k\underline{r} - \omega t)}$ für das freie qmT folgt $E = \hbar \omega$, d.h., die Separationskonstante entspricht der Energie.

rechte Seite: Der ortsabhängige Anteil der Wellenfunktion genügt

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\underline{r}) + U(\underline{r}) \psi(\underline{r}) = E \psi(\underline{r}) \rightarrow \text{stationäre Schrödinger-Gleichung.} \quad (1.6)$$

FAZIT: Bei Bewegung im zeitunabhängigen Potenzial ist die WF $\tilde{\psi}(\underline{r}, t) = \psi(\underline{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$, wobei $\psi(\underline{r})$ die Lösung der stationären SG und E die (zulässigen Werte für die) Energie des qmT sind. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte ist zeitunabhängig, denn

$$|\tilde{\psi}(\underline{r}, t)|^2 = \tilde{\psi}(\underline{r}, t) \tilde{\psi}^*(\underline{r}, t) = \psi(\underline{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \psi^*(\underline{r}) e^{+\frac{i}{\hbar} E t} = \psi(\underline{r}) \psi^*(\underline{r}) = |\psi(\underline{r})|^2 ;$$

wir sprechen von stationären Zuständen.

Bemerkungen:

(i) Kompakte Schreibweise der SG unter Verwendung des Hamilton-Operators \hat{H}

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\underline{r}, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(\underline{r}, t), \quad \hat{H} := -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\underline{r}, t) \rightarrow \text{Hamilton-Operator} \quad (1.2a)$$

Formal kann \hat{H} aus der klassischen Hamilton-Funktion des physikalischen Systems

$$H(\underline{p}, \underline{r}, t) = \frac{\underline{p}^2}{2m} + U(\underline{r}, t) \text{ über die Ersetzung } H(\underline{p}, \underline{r}, t) \rightarrow \hat{H}(\hat{\underline{p}}, \hat{\underline{r}}, t) \text{ unter Verwendung von}$$

$$\underline{p} \rightarrow \hat{\underline{p}} = -i\hbar \nabla, \quad \underline{r} \rightarrow \hat{\underline{r}} = \underline{r} \text{ gebildet werden.}$$

(ii) Werden in der Energie-Impulsrelation des klassischen Teilchens

$$E = \frac{\underline{p}^2}{2m} + U(\underline{r}, t) \text{ bzw. " } E\psi = \frac{\underline{p}^2}{2m} \psi + U(\underline{r}, t)\psi \text{ "}$$

Energie und Impuls durch die Operatoren

$$E \leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \underline{p} \leftrightarrow -i\hbar \nabla = \hat{\underline{p}}$$

ergibt sich die SG

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\underline{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\underline{r}, t) + U(\underline{r}, t) \psi(\underline{r}, t)$$

(die damit natürlich nicht hergeleitet worden ist).

2. Quanten in Kästen und Töpfen: Potenzialtopf, Potenzialstufe, Potentialschwelle (Tunneleffekt)

2.1 Eindimensionale Bewegung eines qmT im zeitunabhängigen Potenzial $U(x)$

Bei eindimensionaler Bewegung im zeitunabhängigen Potenzial $U(x)$ ist die WF

$\tilde{\Psi}(x, t) = \psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ wobei $\psi(x)$ die Lösung der stationären SG

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (2.1)$$

und E die der WF $\psi(x)$ entsprechende Energie des qmT ist. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte (AWD) (und die qm Erwartungswerte, s.u.) sind zeitunabhängig (stationärer Zustand). Als WF kommen nur die normierbaren, eindeutigen, stetigen und stetig differenzierbaren Lösungen von (2.1) in Frage.

- Stetigkeit der WF. Beachte:

(i) Ist $U(x)$ stetig in $x = a$, dann ist wegen (2.1) $\psi''|_a$ stetig in a . Damit sind $\psi'|_a$ und $\psi(a)$ stetig differenzierbar in a .

(ii) Hat $U(x)$ einen endlichen Sprung in $x = a$, sind $\psi'|_a$ und $\psi(a)$ stetig und es gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi(a - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi(a + \varepsilon), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi'|_{a-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi'|_{a+\varepsilon} \quad \text{oder kurz } \psi_I(a) = \psi_{II}(a), \quad \psi'_I(a) = \psi'_{II}(a).$$

Beweis durch Annahme des Gegenteils: Hätte $\psi(x)$ einen Sprung bei $x = a$, also

$\psi(x) \sim \theta(x - a)$, folgte $\psi''(a) \sim \delta'(x - a)$. Hätte $\psi'(x)$ einen Sprung bei $x = a$, also

$\psi'(x) \sim \theta(x - a)$, folgte $\psi''(a) \sim \delta(x - a)$. Beides stünde im Widerspruch zu

$$\psi''(x) = -\frac{2m}{\hbar^2} [E - U(x)] \psi(x), \quad \text{denn links hätten wir einen unendlich, rechts einen endlich}$$

großen Sprung an der Stelle $x = a$.

- Entartung der WF

Wenn zu einem Zustand mit der Energie E mehrere WF $\psi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ existieren, dann nennt man den Zustand n-fach entartet.

Bei der eindimensionalen Bewegung eines qmT in $U(x)$ sind alle Energieniveaus nicht entartet.

Beweis durch Annahme des Gegenteils: Seien ψ_1 und ψ_2 Lösungen zwei verschiedene von (2.1) zum selben Wert der Energie E. Dann gilt (Punkte mit $\psi_{1/2} = 0$ ausgenommen)

$$\frac{\psi_1''}{\psi_1} = \frac{2m}{\hbar^2}(U-E) = \frac{\psi_2''}{\psi_2}, \text{ also } \psi_1' \psi_2 - \psi_2' \psi_1 = \text{const.}$$

Strebt die WF am Rand des zugänglichen Raumbereichs gegen Null, folgt

$$\frac{\psi_1'}{\psi_1} = \frac{\psi_2'}{\psi_2} \text{ d.h. } \psi_1 = C\psi_2.$$

Da die WF normiert sein müssen, ist $C = 1$.

$$\left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi_1(x)|^2}_1 = C^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi_2(x)|^2}_1 \right).$$

- Symmetrie/Parität der WF

Für symmetrische Potentiale $U(x)$, $U(x) = U(-x)$, ist mit $\psi(x)$ auch $\psi(-x)$ Lösung von (2.1) zum Energiewert E, denn wegen der fehlenden Entartung der WF folgt

$$\psi(x) = C\psi(-x) = CC\psi(-(-x)) = C^2\psi(x), \text{ also } C = \pm 1 \text{ und damit } \psi(x) = \begin{cases} \psi(-x) \\ -\psi(-x) \end{cases}.$$

Also sind die WF bei Bewegung in $U(x) = U(-x)$ entweder gerade oder ungerade Funktionen von x.

- Reellwertige WF

Da $U(x)$ reell, sind mit $\psi(x)$ auch $\psi^*(x)$ und die beiden reellen Kombinationen $\psi(x) + \psi^*(x)$ oder $i[\psi(x) - \psi^*(x)]$ Lösungen der linearen (!) stationären SG (2.1). Damit können wir uns im vorliegenden Fall auf reelle WF beschränken.

FAZIT: Bei der eindimensionalen Bewegung eines qmT im Potential $U(x)$ sind die normierbaren (quadratisch integrierbar), eindeutigen (wenigstens $\psi\psi^*$ sei eindeutig), stetigen und stetig differenzierbaren, nicht entarteten, reellen Lösungen von (2.1) physikalisch relevant; im Fall $U(x) = U(-x)$ sind die Wellenfunktionen entweder gerade oder ungerade.

2.2 Eindimensionale Bewegung qmT im stückweise konstanten Potenzial $U(x) = U_0$

→ „Quanten in Kästen und Töpfen“, Approximation ortsabhängiger durch stückweise konstante Potenziale ... Die SG lautet in diesem Fall

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + (U_0 - E)\psi(x) = 0,$$

hat also die Form der Schwingungsgleichung des harmonischen Oszillators (lineare ODE zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten).

Wie üblich verwenden wir den Exponentialansatz $\psi(x) \sim e^{\lambda x}$ und finden

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\lambda^2 + (U_0 - E) = 0 \rightarrow \lambda_{1/2} = \pm\lambda, \quad \lambda = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}.$$

Offensichtlich sind zwei Fälle zu unterscheiden:

A: $E > U_0 \rightarrow$ klassisch erlaubter Bewegungsbereich

λ imaginär \rightarrow setze $\lambda = ik$, $k := \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}$ reell

$$\psi(x) = \underbrace{A e^{ikx}}_{\text{nach rechts}} + \underbrace{B e^{-ikx}}_{\text{nach links}} \quad \text{de Broglie-Wellen mit } p = \hbar k = \pm\sqrt{2m(E - U_0)}.$$

Wie in der KM gilt $\frac{p^2}{2m} = E - U_0$.

Wie zu erwarten, ist die WF die eines freien qmT; lediglich E ist durch $E - U_0$ zu ersetzen.

Merke: oszillatorisches Verhalten der WF im klassisch erlaubten Bereich.

B: $E < U_0 \rightarrow$ klassisch verbotener Bewegungsbereich

$$\lambda \text{ reell} \rightarrow \psi(x) = A e^{\lambda x} + B e^{-\lambda x}.$$

Merke: Exponentielles (abklingendes) Verhalten der WF im klassisch verbotenen Bereich.

Ist der klassisch verbotene Bereich $x_0 < x < \infty$, folgt aus der Normierungsbedingung $A = 0$, also $\psi(x) = B e^{-\lambda x}$. Das kann zu endlichen AWD im klassisch verbotenen Bereich führen.

QmT können in diese Bereiche eindringen und u.U. Potentialbarrieren überwinden.

Fazit: Bei Bewegung in stückweise konstanten Potenzialen ist die Lösung der stationären SG

$$\psi(x) = \begin{cases} A e^{ikx} + B e^{-ikx}, & \hbar k = \sqrt{2m(E - U_0)}, \text{ (klassischerlaubte Bewegung)} \\ A e^{\lambda x} + B e^{-\lambda x}, & \hbar \lambda = \sqrt{2m(U_0 - E)}, \text{ (klassisch verbotene Bewegung)} \end{cases}. \quad (2.2)$$

2.3 Eindimensionale Bewegung qmT im Potenzialtopf. Diskrete Energieniveaus.

A: Zunächst betrachten wir einen Potenzialtopf mit ∞ hohen Wänden

$$U(x) = U(-x) = \begin{cases} 0, & |x| < a \\ \infty, & |x| \geq a \end{cases}.$$

WF außerhalb des Topfes, $|x| \geq a$:

$E < U_0$, also $\psi(x) = A e^{\lambda x} + B e^{-\lambda x}$. Da $\lambda = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} \rightarrow \infty$ folgt unter

Berücksichtigung der Normierungsbedingung $\psi(x) = 0, |x| \geq a$.

WF innerhalb des Topfes, $|x| < a$:

$E > U_0 = 0$, also $\psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$ mit $k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$.

Wie erwartet, sind die WF reell sowie gerade oder ungerade.

Bei $x = \pm a$ müssen die Stetigkeitsbedingungen erfüllt sein.

Gerade WF: Aus $\psi(x) = \psi(-x)$ folgt $A = B$ und $\psi(x) = 2A \cos(kx)$.

Stetigkeitsforderung ergibt $\cos(ka) = 0$, also $k = \frac{n\pi}{2a}$, $n = 1, 3, 5, \dots$ diskret !!

Ungerade WF: Aus $\psi(x) = -\psi(-x)$ folgt $A = -B$ und $\psi(x) = -2iA \sin(kx)$

Stetigkeitsforderung ergibt $\sin(ka) = 0$, also $k = \frac{n\pi}{2a}$, $n = 2, 4, 6, \dots$ diskret !!

Aufgrund der diskreten Werte für k sind auch die Werte für die zu den WF gehörenden Werte der Energie diskret, d.h. aus $k \rightarrow k_n$ folgt

$$E \rightarrow E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{8ma^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \rightarrow \text{diskretes Energiespektrum}$$

für die Bewegung qmT im unendlich tiefen Potenzialtopf.

Normierung der WF: Wegen

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx C \cos k_n x C \cos k_n x = I = C^2 \int_{-a}^a dx \cos^2 k_n x = C^2 \int_{-a}^a \frac{1}{k_n} d(\sin k_n x) \cos k_n x =$$

$$\underbrace{\frac{C^2}{k_n} \sin k_n x \cos k_n x}_{0} \Big|_{-a}^a - \frac{C^2}{k_n} \int_{-a}^a dx \sin k_n x (-k_n \sin k_n x) dx = C^2 \int_{-a}^a dx \sin^2 k_n x =$$

$$C^2 \int_{-a}^a dx (1 - \cos^2 k_n x) \text{ also } 2I = 2 = C^2 \int_{-a}^a dx = C^2 2a \text{ bzw. } C = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

finden wir für die geraden WF den Normierungsfaktor $C = 1/\sqrt{a}$; das gleiche Resultat ergibt sich für die ungeraden WF.

Fazit: Im unendlich tiefen Potenzialtopf gilt

(i) Das Energiespektrum $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{8ma^2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

→ ist diskret

→ der Abstand zwischen benachbarten Energieniveaus wächst proportional zu n

→ je breiter der Topf, desto enger liegen benachbarte Energieniveaus beieinander

(ii) Die Wellenfunktionen $\psi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{n\pi x}{2a}\right), & n = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{2a}\right), & n = 2, 4, 6, \dots \\ 0, & \text{für } |x| \geq a \end{cases}$ für $|x| < a$

→ sind reell, gerade oder ungerade und besitzen $n - 1$ Knoten.

(iii) Die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte

$$\psi_n(x) \psi_n^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{2a}\right), & n = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{1}{a} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{2a}\right), & n = 2, 4, 6, \dots \\ 0, & \text{für } |x| \geq a \end{cases} \text{ für } |x| < a$$

→ hat n Maxima innerhalb $|x| < a$.

Beispiele:

- $n = 1 \rightarrow$ Grundzustand

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2} \neq 0 (!); \quad \psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \rightarrow \text{kein Knoten}; \quad \psi_1^2(x) = \frac{1}{a} \cos^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$$

\rightarrow maximal im Zentrum $x = 0$ des Potenzialtopfes

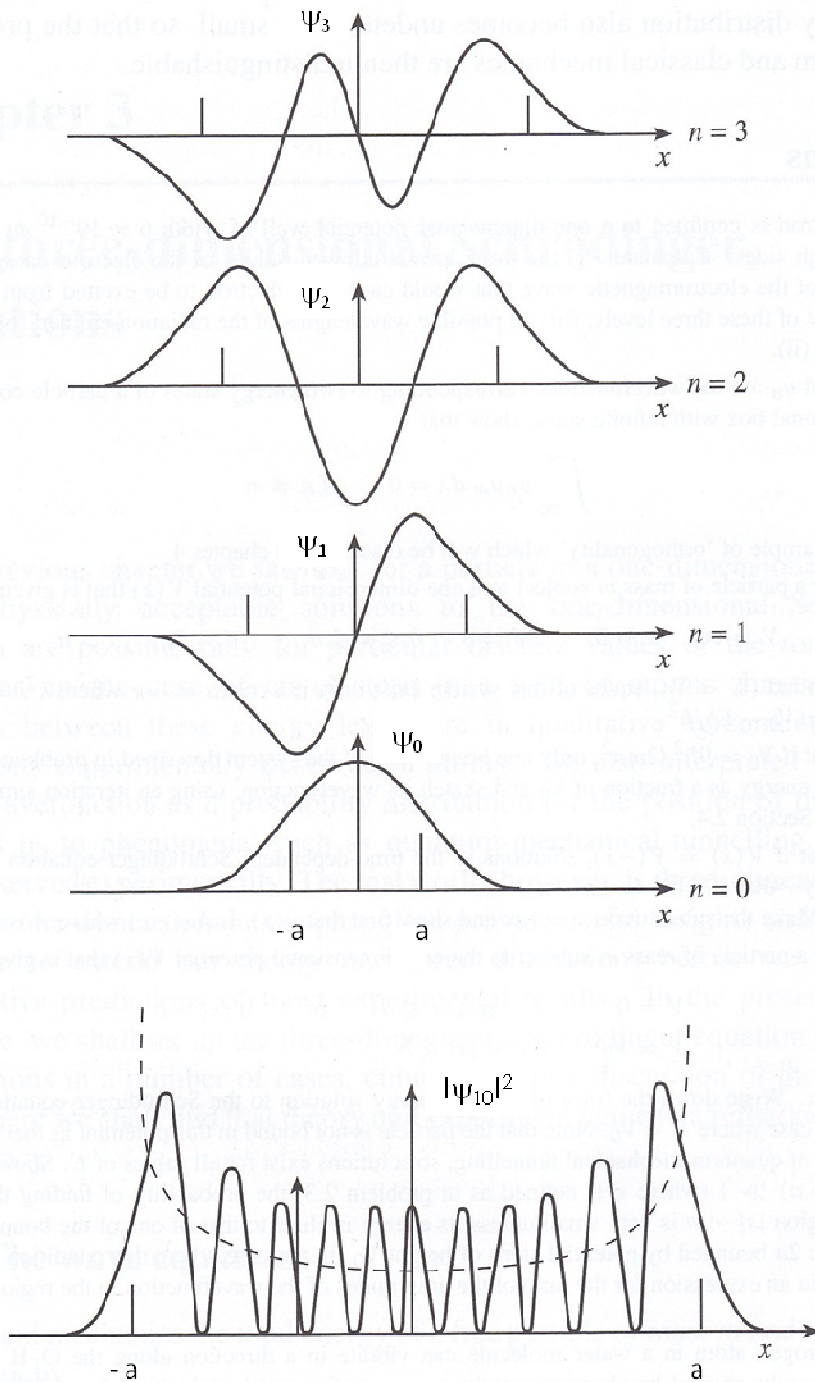
- $n = 2 \rightarrow$ erster angeregter Zustand

$$E_2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}; \quad \psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \rightarrow \text{ein Knoten}; \quad \psi_2^2(x) = \frac{1}{a} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \rightarrow \text{Maxima der}$$

Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte bei $x = \pm \frac{a}{2}$

B: Endlich tiefer Potenzialtopf $U(x) = \begin{cases} 0, & |x| < a \\ U_0, & |x| \geq a \end{cases}$.

Analoge Rechnungen im Fall des endlich tiefen Potenzialtopfes (\rightarrow Übungsblatt) führen auf die gleichen Schlussfolgerungen (i) – (iii) oben mit modifizierten Ergebnissen für E_n und $\psi_n(x)$; im Grenzfall $U_0 \rightarrow \infty$ ergeben sich die hier diskutierten Ausdrücke (einschließlich der Rechtfertigung der Randbedingung $\psi(\pm a) = 0$).



Einfache Abschätzungen:

- Proton im Atomkern: $m_p \sim 91,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, $a \sim 2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$

Wir finden $E_2 - E_1 \sim 5 \cdot 10^{-12} \text{ J} \sim 30 \text{ MeV}$.

- Elektron im Potenzialtopf atomarer Abmessungen: $m_e \sim 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $a \sim 10^{-10} \text{ m}$

Es ergibt sich $E_n \sim 1,5 \cdot 10^{-18} n^2 \text{ J}$. Die Energiedifferenz zwischen Grundzustand und erstem angeregten Zustand ist $E_2 - E_1 \sim 4,5 \cdot 10^{-18} \text{ J} \sim 28 \text{ eV}$.

Die Wellenlänge eines beim Übergang $E_2 - E_1$ emittierten Photons betrage $\lambda \sim 4,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, das ist die richtige Größenordnung vieler atomarer Übergänge.

- Salzkorn: $m \sim 10^{-10} \text{ kg}$, $a \sim 10^{-6} \text{ m}$

$E_n \sim 1,4 \cdot 10^{-46} n^2 \text{ J}$ (!). Zum Vergleich die mittlere thermische Energie pro Freiheitsgrad bei 1 K (also nur Grad über dem absoluten Nullpunkt der Temperatur) ist $kT \sim 10^{-23} \text{ J}$, das entspräche $n \sim 3 \cdot 10^{11}$ und einem Abstand zwischen benachbarten Niveaus von $\sim 8 \cdot 10^{-35} \text{ J}$. Diese feine Energiequantelung ist experimentell nicht auflösbar ...