

Prof. Dr. Harald Engel
Judith Lehnert, Benjamin Lingnau, Maria Zeitz, Julian Böll, Alexander Ziepke

10. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Fr. 26.06.2015 bis 14 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Aufgabe 25 (2+3=5 Punkte): Radialanteil der Wellenfunktion des Wasserstoffatoms

(a) Zeigen Sie, ausgehend von Gleichung (10.7) im Vorlesungsskript

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} \chi_{nl}(r) + \left[-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right] \chi_{nl}(r) = E \chi_{nl}(r),$$

dass der "Radialanteil" χ_{nl} der Wellenfunktion entsprechend

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_{n,l,m}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\chi_{nl}(r)}{r} Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$$

für die nichtrelativistische Bewegung des Elektrons im Wasserstoffatom der Gleichung (10.10)

$$\chi''(\zeta) - \frac{l(l+1)}{\zeta^2} \chi(\zeta) + \left(\frac{\beta}{\zeta} - \frac{1}{4} \right) \chi(\zeta) = 0$$

genügt und dass

$$\beta = \sqrt{-\frac{\mu}{2E}} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar}.$$

Dabei sei μ die Masse und $\zeta = \sqrt{-\frac{8\mu E}{\hbar^2}} r = \frac{2r}{n^2 a_0}$ der mit dem Bohr'schen Radius a_0 reskalierte Abstand vom Kern.

(b) Benutzen Sie den Lösungsansatz

$$\chi(\zeta) = F(\zeta) \exp\left(-\frac{\zeta}{2}\right) = \exp\left(-\frac{\zeta}{2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^k$$

und leiten Sie für die Koeffizienten a_k die Rekursionsformel

$$a_{k+1} = \frac{k - \beta}{k(k+1) - l(l+1)}, \quad a_1 = 0 \text{ falls } l \neq 0$$

her.

Aufgabe 26 (2.5+1.5+3+4=11 Punkte): Wasserstoffatom

Eine normierte Wellenfunktion ist gegeben durch

$$\Psi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{a_0^{-3/2}}{\sqrt{\pi}} \exp(-r/a_0).$$

(a) Zeigen Sie durch Einsetzen in die zeitunabhängige Schrödingergleichung, dass $\Psi(r, \vartheta, \varphi)$ eine Eigenfunktion des Wasserstoffatoms mit dem Coulomb-Potential $V(r) = -e^2/(4\pi\epsilon_0 r)$ ist. Geben Sie den Energieeigenwert und die Quantenzahlen des Zustandes an.

Hinweis: Der Bohrsche Radius $a_0 = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / (m_e e^2)$ ist ein typisches atomares Längemaß. Eine entsprechende charakteristische Energieeinheit ist die Rydberg-Energie $E_R = \hbar^2 / (2m_e a_0^2)$.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit im Zustand Ψ das Elektron innerhalb des Kerns zu finden (Kernradius ca. 10^{-15} m)?

10. Übung TPII SoSe 15

- (c) Plotten Sie nun die radiale Aufenthalts-Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(r) = \int \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi r^2 |\Psi_{nlm}(\mathbf{r})|^2$ für
- (i) die Zustände $l = 0$ mit $n = 1, 2, 3, 4$,
 - (ii) die Zustände $n = 4$ mit $l = 0, 1, 2, 3$.

Der Code ist Teil der Lösung und gibt auch Punkte.

Hinweis: Verwenden Sie als Längenskala den *Bohrschen Radius* und beachten Sie, dass die Laguerre-Polynome in Mathematica nicht die übliche Normierung haben. Ein Blick in die Hilfefunktion kann nützlich sein.

- (d) Berechnen Sie für die Zustände $l = 0$ mit $n = 1, 2$ und $n = 2$ mit $l = 1$ je den wahrscheinlichsten und den mittleren Abstand zwischen Elektron und Kern und vergleichen Sie diese Werte mit dem Bohrschen Radius.

Aufgabe 27 (1.5+2.5=4 Punkte): Virialsatz

Der Virialsatz setzt die Mittelwerte der kinetischen und potentiellen Energie in Verbindung und ermöglicht Abschätzungen auch in komplexen System. Generell gilt der Virialsatz in der Mechanik für alle homogenen und konservativen Potentiale.

Zeigen Sie, dass der Virialsatz in der Quantenmechanik mit dem Coulombpotential gültig bleibt.

- (a) Berechnen Sie den Erwartungswert des Coulomb-Potentials im Grundzustand des Wasserstoffatoms und zeigen Sie dass $\langle V \rangle = 2E_1$.
- (b) Berechnen Sie den Erwartungswert der kinetischen Energie im Grundzustand des Wasserstoffatoms und bestätigen Sie die Gültigkeit des Analogons zum Virialsatz der klassischen Mechanik:

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle V \rangle .$$

Wochenplan					
	Mo	Di	Mi	Do	Fr
08-10		EW 202 HE	EW 202 HE		
10-12				EW 229 JB	EW 229 MZ
12-14	EW 114 AZ EW 229 JB			EW 229 AZ	
14-16					
16-18			EW 114 JL EW 229 BL		

Sprechstunden			
HE	Prof. Dr. Harald Engel	Mi 14:30-16	EW 738
AZ	Alexander Ziepke	Mi 14-15	EW 060
BL	Benjamin Lingnau	Di 14-15	EW 629
JB	Julian Böll	Mi 15-16	EW 060
JL	Judith Lehnert	Mo 15-16	ER 246
MZ	Maria Zeitz	Do 14-15	EW 702