Prof. Dr. Harald Engel
Judith Lehnert, Benjamin Lingnau, Maria Zeitz, Julian Böll, Alexander Ziepke

2. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Do. 30.04.2015 bis 14:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Aufgabe 4 (4 Punkte): *Kontinuitätsgleichung*

Leiten Sie aus der Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x)\Psi(x,t)$$

für die eindimensionale Bewegung eines quantenmechanischen Teilchens im Potential $U(x)$ die Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial}{\partial t}(|\Psi|^2) + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$ mit $j = \frac{\hbar}{2mi}\left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\right)$ her.

Aufgabe 5 (2+4+1+4=11 Punkte): *Korrespondenz zwischen klassischer Mechanik und Quantenmechanik*

Die Schrödingergleichung ist ein Postulat der Quantenmechanik (QM) und lässt sich nicht allgemein herleiten. Hier soll die Korrespondenz zwischen der klassischen Mechanik und der QM durch Herleitung der klassischen Hamilton-Jacobi-Gleichung (HJG) aus der quantenmechanischen Schrödingergleichung gezeigt werden. Die HJG für die Wirkung $S(\mathbf{r},t)$ ist gegeben durch

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m}\Big(\nabla S(\mathbf{r},t)\Big)^2 + U(\mathbf{r},t)\,. \tag{1}$$

(a) Setzen Sie den Ansatz $\Psi(\mathbf{r},t) = e^{\frac{i}{\hbar}S(\mathbf{r},t)}$ für die Wellenfunktion eines quantenmechanischen Teilchens in die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \Psi(\mathbf{r},t) + U(\mathbf{r},t)\Psi(\mathbf{r},t) \tag{2}$$

ein. Sie erhalten daraus eine partielle Differentialgleichung für $S(\mathbf{r},t)$.

(b) Entwickeln Sie nun die Wirkung nach Ordnungen von $i\hbar$:

$$S(\mathbf{r},t) = S_0(\mathbf{r},t) + i\hbar S_1(\mathbf{r},t) + (i\hbar)^2 S_2(\mathbf{r},t) + \dots \tag{3}$$

Überführen Sie damit das Ergebnis aus (a) in zwei partielle Differentialgleichungungen für S_0 und S_1. Interpretieren Sie die Gleichung für S_0.

Hinweis: Führen Sie einen Koeffizientenvergleich bezüglich $\hbar$ durch.

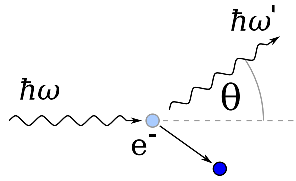
(c) Vernachlässigen Sie nun Terme der Ordnung $\hbar^2$ und höher in $S(\mathbf{r},t)$. Drücken Sie in dieser Näherung die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi|^2$ aus.

(d) Berechnen Sie in derselben Näherung mithilfe der Ergebnisse aus (b) und (c) die zeitliche Entwicklung der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi|^2$. Sie erhalten eine Kontinuitätsgleichung der Form $\frac{\partial}{\partial t}|\Psi|^2 + \nabla \mathbf{j} = 0$.
Identifizieren und interpretieren Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\mathbf{j}$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem allgemeinen Fall aus Aufgabe 4.

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass in der klassischen Mechanik $\nabla S(\mathbf{r},t) = \mathbf{p}$ der klassische Impuls ist.

Aufgabe 6 (5 Punkte): *Compton-Streuung*

Die Compton-Streuung ist ein wichtiges Experiment zur Veranschaulichung des Teilchencharakters von Licht. Berechnen Sie unter Verwendung der relativistischen Energie-Impuls-Beziehungen die Wellenlängenänderung $\Delta\lambda$, die ein Photon bei der Streuung an einem ruhenden Elektron erfährt. Der Streuwinkel sei durch Θ gegeben (siehe Skizze).



Wochenplan					
	Mo	**Di**	**Mi**	**Do**	**Fr**
08-10		EW 202 HE	EW 202 HE		
10-12				EW 229 JB	EW 229 MZ
12-14	EW 114 AZ EW 229 JB			EW 229 AZ	
14-16					
16-18			EW 114 JL EW 229 BL		

Sprechstunden			
HE	Prof. Dr. Harald Engel	Mi 14:30-16	EW 738
AZ	Alexander Ziepke	Mi 14-15	EW 060
BL	Benjamin Lingnau	Di 14-15	EW 629
JB	Julian Böll	Mi 15-16	EW 060
JL	Judith Lehnert	Mo 15-16	ER 246
MZ	Maria Zeitz	Do 14-15	EW 702