Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 6. Mai 2015
http://www.tu-berlin.de/?qm15

Prof. Dr. Harald Engel
Judith Lehnert, Benjamin Lingnau, Maria Zeitz, Julian Böll, Alexander Ziepke

4. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Fr. 15.05.2015 bis 14 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Aufgabe 9 (16 Punkte): *Harmonischer Oszillator in der QM*

In der Vorlesung haben wir die stationäre Schrödingergleichung für die eindimensionale Bewegung eines quantenmechanischen Teilchens im parabolischen Potential mit dem Ansatz
$\psi(y) = c_n H(y) e^{-\frac{y^2}{2}}$ auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dy^2} H_n(y) - 2y \frac{d}{dy} H_n(y) + 2n H_n(y) = 0 \qquad , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

transformiert und diese Gleichung dann mit einem Potenzreihenansatz gelöst.

(a) Zeigen Sie unter Verwendung der Methode der vollständigen Induktion, dass die hermiteschen Polynome

$$H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2} \tag{1}$$

Lösungen der linearen homogenen ODE 2. Ordnung sind.

(b) Zeigen Sie mithilfe der Ergebnisse aus (a), dass $\frac{dH_n(y)}{dy} = 2nH_{n-1}(y)$ gilt.

(c) Bestimmen Sie die Normierungskonstanten c_n, um sich zu überzeugen, dass die normierten Wellenfunktionen für den harmonischen Oszillator

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} H_n\left(\frac{x}{b}\right) e^{-\frac{x^2}{2b^2}}, \quad n = 1, 2, \ldots, \; b = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{1}{2}}$$

lauten. Zeigen Sie dazu, dass gilt:

$$\frac{1}{c_n^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[H_n(y)\right]^2 e^{-y^2} = \sqrt{\pi} 2^n n! \,.$$

Hinweis: Nutzen Sie dazu die in (b) abgeleitete Relation.

(e) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^*(x) \psi_n(x') = \delta(x - x')$$

wobei $\delta(x - x')$ die Dirac'sche Deltafunktion sei.

Hinweis: Benutzen Sie die Definitionsgleichung der hermiteschen Polynome und stellen Sie darin die Gaußfunktionen durch ihre Fouriertransformierte dar. Siehe auch erstes Übungsblatt.

(f) Plotten Sie die ersten 5 Wellenfunktionen des Harmonischen Oszillators sowie die dazu gehörigen Aufenthaltswahrscheinlichkeiten mit einem Programm Ihrer Wahl. Plotten Sie außerdem die Aufenthaltwahrscheinlichkeit für $n = 70$ zusammen mit der aus der Vorlesung bekannten Aufenthaltwahrscheinlichkeit des klassischen harmonischen Oszillators. Setzen Sie dazu $b = 1$.
Hinweis: In Mathematica dürfen Sie den Befehl `HermiteH[ ]` zur Berechnung der Hermitepolynome benutzen.

Aufgabe 10 (4 Punkte): *Wellenfunktion im Impulsraum*

Welcher Differentialgleichung entspricht die in der Vorlesung diskutierte Fouriertransformierte der Wellenfunktion

$$\phi(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x,t) \exp\left(-i\frac{p}{\hbar}x\right) \quad ?$$

Wochenplan					
	Mo	**Di**	**Mi**	**Do**	**Fr**
08-10		EW 202 HE	EW 202 HE		
10-12				EW 229 JB	EW 229 MZ
12-14	EW 114 AZ EW 229 JB			EW 229 AZ	
14-16					
16-18			EW 114 JL EW 229 BL		

Sprechstunden			
HE	Prof. Dr. Harald Engel	Mi 14:30-16	EW 738
AZ	Alexander Ziepke	Mi 14-15	EW 060
BL	Benjamin Lingnau	Di 14-15	EW 629
JB	Julian Böll	Mi 15-16	EW 060
JL	Judith Lehnert	Mo 15-16	ER 246
MZ	Maria Zeitz	Do 14-15	EW 702