

Prof. Dr. Harald Engel  
Judith Lehnert, Benjamin Lingnau, Maria Zeitz, Julian Böll, Alexander Ziepke

**6. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik**

**Abgabe: Fr. 29.05.2015 bis 14 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude**

**Aufgabe 14 (1.5+2+6.5=10 Punkte):** *Matrixdarstellung von Operatoren und Basiswechsel*

Betrachten Sie zwei Operatoren  $\hat{A}$  und  $\hat{B}$ , deren Eigenvektoren  $|a_n\rangle, |b_n\rangle$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) jeweils vollständige, orthonormierte Eigensysteme bilden. Die dazugehörigen Eigenwerte seien gegeben durch  $a_n, b_n \in \mathbb{C}$  und seien nicht entartet. Es gilt also

$$\hat{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle \qquad \hat{B}|b_n\rangle = b_n|b_n\rangle . \quad (1)$$

Ein beliebiger Zustand  $|\psi\rangle$  lässt sich in der  $\hat{A}$ -Darstellung als Linearkombination der Eigenvektoren von  $\hat{A}$  schreiben:

$$|\psi\rangle_A = \sum_n \alpha_n |a_n\rangle , \quad (2)$$

mit Koeffizienten  $\alpha_n = \langle a_n | \psi \rangle$ .

(a) Geben Sie  $|\psi\rangle$  in der  $\hat{B}$ -Darstellung an. Berechnen Sie dazu die Koeffizienten  $\beta_n = \langle b_n | \psi \rangle$  als Funktion der Koeffizienten  $\alpha_n$  und der Basisvektoren  $|a_n\rangle, |b_n\rangle$ .

(b) Welche Form hat der Operator  $\hat{A}$  in der  $\hat{A}$ - und in der  $\hat{B}$ -Darstellung, d.h. wie sieht der Vektor  $\hat{A}|\psi\rangle$  in der jeweiligen Darstellung aus, wenn  $|\psi\rangle$  in eben dieser Darstellung gegeben ist?

(c) Seien nun  $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  und  $\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ .

- Zeigen Sie, dass  $\hat{A}$  die Eigenwerte  $a_1 = -1, a_2 = 1$  besitzt.
- Berechnen Sie  $\psi_A = \begin{pmatrix} \langle a_1 | \psi \rangle \\ \langle a_2 | \psi \rangle \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}_A$  in der  $\hat{B}$ -Darstellung .
- Berechnen Sie  $\hat{A}$  in der  $\hat{A}$ - und in der  $\hat{B}$ -Darstellung.

**Aufgabe 15 (2.5+1+1+1+1.5+3=10 Punkte):** *Messungen in der Quantenmechanik*

Ein quantenmechanisches System, welches durch drei Energieniveaus beschrieben werden kann, besitze den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \varepsilon \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

in Matrixform und sei zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Zustand

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

präpariert. Hier ist  $|\psi(t=0)\rangle$  in der Basis der Energieeigenzustände gegeben (also  $|\psi\rangle \equiv |\psi\rangle_H$ ). Außerdem existiert eine Observable  $X$ , deren Operator in der Basis der Energieeigenzustände folgende Matrixdarstellung hat:

$$\hat{X} = \ell \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} . \quad (5)$$

6. Übung TPII SoSe 15

- Bestimmen Sie die normierten Eigenzustände (Vektoren) und Eigenwerte des Hamilton-Operators und des Operators  $\hat{X}$ .
- Welche Messwerte sind bei einer Messung der Energie bzw. der Observablen  $X$  zur Zeit  $t = 0$  möglich und mit welcher Wahrscheinlichkeit treten diese Messwerte auf?
- Zur Zeit  $t = 0$  soll zunächst die Energie gemessen werden und sofort danach die Observable  $X$ . Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man erst den Messwert 0 für die Energie und danach  $\sqrt{3}\ell$  für die Observable  $X$ ?
- In einem identischen Experiment soll zur Zeit  $t = 0$  zunächst die Observable  $X$  und sofort danach die Energie gemessen werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man erst den Messwert  $\sqrt{3}\ell$  für die Observable  $X$  und danach 0 für die Energie? Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Resultat aus Aufgabenteil (c).
- Welche Voraussetzung müssen zwei Operatoren erfüllen, damit die Reihenfolge der Messungen deren Ergebnis nicht beeinflusst? Überprüfen Sie explizit, ob die gegebenen Operatoren diese Voraussetzung erfüllen.
- Berechnen Sie  $|\psi(t)\rangle$ , den Erwartungswert der Energie und der Observablen  $X$  in diesem Zustand.

Wochenplan					
	Mo	Di	Mi	Do	Fr
08-10		EW 202 HE	EW 202 HE		
10-12				EW 229 JB	EW 229 MZ
12-14	EW 114 AZ EW 229 JB			EW 229 AZ	
14-16					
16-18			EW 114 JL EW 229 BL		

Sprechstunden			
HE	Prof. Dr. Harald Engel	Mi 14:30-16	EW 738
AZ	Alexander Ziepke	Mi 14-15	EW 060
BL	Benjamin Lingnau	Di 14-15	EW 629
JB	Julian Böll	Mi 15-16	EW 060
JL	Judith Lehnert	Mo 15-16	ER 246
MZ	Maria Zeitz	Do 14-15	EW 702