Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 27. Mai 2015
http://www.tu-berlin.de/?qm15

Prof. Dr. Harald Engel
Judith Lehnert, Benjamin Lingnau, Maria Zeitz, Julian Böll, Alexander Ziepke

# 7. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

**Abgabe: Fr. 05.06.2015 bis 14 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude**

**Aufgabe 16 (1+1+2=4 Punkte):** *Unitäre Transformationen*

Eine unitäre Transformation von Zuständen $|\psi\rangle$ und Operatoren $\hat{A}$ mittels eines unitären Operators $\hat{U}$ ist definiert durch

$$|\psi'\rangle = \hat{U}\,|\psi\rangle$$
$$\hat{A}' = \hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger.$$

Dabei gilt für den Operator $\hat{U}$: $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{\mathbb{1}}$. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften solcher unitärer Transformationen:

(a) Die Eigenwerte unitärer Operatoren können nur komplexe Zahlen vom Betrag Eins sein.

(b) $\left(\hat{A}'\right)^\dagger = \left(\hat{A}^\dagger\right)'$ Der transformierte des adjungierten Operators und der adjungierte des transformierten Operators stimmen überein. Das bedeutet, dass unitäre Transformation und Adjungation eines Operators vertauschbar sind.

(c) Für einen beliebigen hermiteschen Operator $\hat{A}$ ist der Operator $\hat{U} = \exp(i\lambda\hat{A})$ unitär. Welche Voraussetzung muss $\lambda$ dazu erfüllen?

**Aufgabe 17 (2+2+6=10 Punkte):** *Leiteroperatoren des harmonischen Oszillators*

Im Zusammenhang mit der Diagonalisierung des harmonischen Oszillators wurden in der Vorlesung die Auf- und Absteigeoperatoren

$$\hat{a}^\dagger := \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{\hat{x}}{b} - i\frac{b}{\hbar}\,\hat{p}\right),$$
$$\hat{a} := \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{\hat{x}}{b} + i\frac{b}{\hbar}\,\hat{p}\right)$$

eingeführt. Hier ist $b = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{1}{2}}$ die Oszillatorlänge. Vgl. Übungsblatt 4.

(a) Zeigen Sie analog zum Vorgehen in der Vorlesung, dass

$$a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,.$$

Seien nun die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators in Ortsdarstellung durch

$$\psi_0(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} b^{-\frac{1}{2}} \exp[-\tfrac{1}{2}(x/b)^2] \text{ und}$$
$$\psi_n(x) = N\hat{a}^{\dagger n}\psi_0(x), \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$

gegeben.

(b) Leiten Sie $\psi_0(x)$ aus der Besetzungszahldarstellung her.

(c) Zeigen Sie, dass nun folgt

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} H_n\left(\frac{x}{b}\right) e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

Wobei $H_n(\frac{x}{b})$ die von Blatt 4 bekannten Hermite-Polynome sind.
*Hinweis:* Sie dürfen verwenden, dass man die Hermite Polynome auch als

$$H_n(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2b}\right)\left(x - \frac{d}{dx}\right)^n \exp\left(-\frac{x^2}{2b}\right)$$

darstellen kann. Vollständige Punktzahl wird allerdings nur erreicht, wenn Sie zeigen, dass diese Darstellung der in Blatt 4 gegebenen Standarddarstellung entspricht.

**Aufgabe 18 (1.5+1.5+1+1+2=7 Punkte):** *Harmonischer Oszillator in Matrixdarstellung*
Wir betrachten die Eigenzustände $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^+)^n |0\rangle$ des Hamiltonoperators $\hat{H}$ des Harmonischen Oszillators in Matrixdarstellung. Die Eigenzustände lauten dann:

$$|0\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad |1\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad |2\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad \cdots \quad .$$

Berechnen Sie die Matrixform des Erzeugungs- und Vernichtungsoperators $\hat{a}^+$ und $\hat{a}$, des Orts- und Impulsoperator $\hat{x}$ und $\hat{p}$ und des Hamiltonoperators $\hat{H}$ in dieser Basis. Leiten Sie für den letzten Fall zunächst einen Ausdruck für den Hamiltonoperator her, der nur von $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ abhängt.

**Wochenplan**

| | **Mo** | **Di** | **Mi** | **Do** | **Fr** |
|---|---|---|---|---|---|
| 08-10 | | EW 202 HE | EW 202 HE | | |
| 10-12 | | | | EW 229 JB | EW 229 MZ |
| 12-14 | EW 114 AZ<br>EW 229 JB | | | EW 229 AZ | |
| 14-16 | | | | | |
| 16-18 | | | EW 114 JL<br>EW 229 BL | | |

**Sprechstunden**

| | | | |
|---|---|---|---|
| HE | Prof. Dr. Harald Engel | Mi 14:30-16 | EW 738 |
| AZ | Alexander Ziepke | Mi 14-15 | EW 060 |
| BL | Benjamin Lingnau | Di 14-15 | EW 629 |
| JB | Julian Böll | Mi 15-16 | EW 060 |
| JL | Judith Lehnert | Mo 15-16 | ER 246 |
| MZ | Maria Zeitz | Do 14-15 | EW 702 |