

Prof. Dr. Harald Engel
Judith Lehnert, Benjamin Lingnau, Maria Zeitz, Julian Böll, Alexander Ziepke

9. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Fr. 19.06.2015 bis 14 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Aufgabe 22 (3+5=8 Punkte): Larmorpräzession

Ein Wasserstoffatom befinde sich in einem homogenen zeitlich konstanten Magnetfeld $\mathbf{B} = (B_x, 0, 0)$. Der Hamiltonoperator des Systems ist gegeben durch $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$. Dabei bezeichnet \hat{H}_0 den Hamiltonoperator des freien Wasserstoffatoms. Der Zusatzterm $\hat{H}_1 = \frac{-e}{2m_e} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{L}}$, beschreibt Wechselwirkung des magnetischen Momentes des Elektrons mit dem Magnetfeld. Dabei ist $-e$ die Elektronenladung und m_e die Elektronenmasse. $\hat{\mathbf{L}}$ bezeichnet den Bahndrehimpulsoperator des Elektrons.

- (a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Erwartungswerte $\langle \hat{L}_i \rangle$ der Komponenten des Drehimpulsoperators auf.

Hinweis: Verwenden Sie die Rotationssymmetrie von \hat{H}_0 . Es gilt also $[\hat{L}_i, \hat{H}_0] = 0$.

- (b) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für den Fall, dass sich das Elektron anfänglich im \hat{L}_z -Eigenzustand $|l m\rangle = |1 1\rangle$ befindet. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Hinweis: Die Lösungen und die explizite Form von \hat{H}_0 werden zur Lösung dieser Aufgabe nicht benötigt.

Aufgabe 23 (5 Punkte): Kugelflächenfunktionen

Die Eigenfunktionen der Bahndrehimpulsoperatoren $\hat{\mathbf{L}}^2$ und \hat{L}_z in Ortsdarstellung sind gerade die Kugelflächenfunktionen

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

mit den zugeordneten Legendre-Polynomen

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l,$$

welche in der Vorlesung eingeführt wurden.

Visualisieren Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte der möglichen Eigenfunktionen $|lm\rangle$ des Drehimpulsoperators für $l \in \{0, 1\}$. Plotten Sie außerdem die p_x und p_y -Orbitale, die durch

$$p_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1-1\rangle - |11\rangle) \qquad p_y = \frac{i}{\sqrt{2}} (|1-1\rangle + |11\rangle)$$

gegeben sind.

Hinweis: Benutzen Sie in Mathematica den Befehl SphericalPlot3D. Die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \phi)$ sind durch SphericalHarmonicY[1,m, θ , ϕ] gegeben. Das auf der Webseite der Vorlesung zur Verfügung gestellte Applet kann ebenso verwendet werden.

Bitte Rückseite beachten!

9. Übung TPII SoSe 15

Aufgabe 24 (3+3+1=7 Punkte): Spin-Rotation

Der Operator

$$\hat{U}(\alpha) = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{L}}$$

dreht einen Zustand um die α -Achse um den Winkel $|\alpha|$. In dieser Aufgabe soll der Zustand eines Spin- $1/2$ Teilchens um 360° um die x -Achse gedreht werden. Die Spinmatrizen $\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_i$ sind gegeben durch

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass sich der Drehoperator um die x -Achse $\hat{U}(\alpha) = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{S}_x}$ darstellen lässt durch

$$\hat{U}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) & -i \sin(\alpha/2) \\ -i \sin(\alpha/2) & \cos(\alpha/2) \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Reihendarstellung von \sin , \cos und der e -Funktion und $\hat{\sigma}_x^2 = 1$.

- (b) Der Zustand $|\uparrow_z\rangle = (1, 0)$ wird nun um den Winkel α gedreht

$$|\psi_\alpha\rangle = \hat{U}(\alpha)|\uparrow_z\rangle.$$

Berechnen Sie die Erwartungswerte von \hat{S}_y und \hat{S}_z als Funktion von α .

- (c) Um welchen Winkel α muss der Zustand $|\uparrow_z\rangle$ gedreht werden, sodass $|\psi_\alpha\rangle$ wieder $|\uparrow_z\rangle$ ergibt?

Wochenplan					
	Mo	Di	Mi	Do	Fr
08-10		EW 202 HE	EW 202 HE		
10-12				EW 229 JB	EW 229 MZ
12-14	EW 114 AZ EW 229 JB			EW 229 AZ	
14-16					
16-18			EW 114 JL EW 229 BL		

Sprechstunden			
HE	Prof. Dr. Harald Engel	Mi 14:30-16	EW 738
AZ	Alexander Ziepke	Mi 14-15	EW 060
BL	Benjamin Lingnau	Di 14-15	EW 629
JB	Julian Böll	Mi 15-16	EW 060
JL	Judith Lehnert	Mo 15-16	ER 246
MZ	Maria Zeitz	Do 14-15	EW 702