Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Dr. Johannes Blaschke (Sprechstunde: Mi 10:00-11:00 in EW 708)

4. Übungsblatt – Statistische Physik

Abgabe/Vorrechnen: Mo. 11.05.2015 im Tutorium (16:00 - 17:30 EW 731)

M Aufgabe 14: *Boltzmanngleichung*

Betrachten Sie ein Gas nicht wechselwirkender Teilchen der Masse m, die elastisch an raumfesten Teilchen der Dichte n_0 streuen. Für den Fall, dass keine externen Kräfte angreifen, lässt sich der Stoßterm dann schreiben als

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\text{coll.}} = \int |\mathbf{v}-\mathbf{v}_2| \left[f(\mathbf{q},\mathbf{p}_3(\Omega),t)f(\mathbf{q},\mathbf{p}_4(\Omega),t) - f(\mathbf{q},\mathbf{p},t)f(\mathbf{q},\mathbf{p}_2,t)\right] \left|\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right| \mathrm{d}^3p_2 \mathrm{d}\Omega\,. \tag{4.24}$$

Zeigen Sie, dass für die Boltzmanngleichung dann gilt

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m}\mathbf{p}\cdot\nabla_q + \mathbf{F}\cdot\nabla_p\right\} f(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = \frac{n_0|\mathbf{p}|}{m}\int \left[f(\mathbf{q},\mathbf{p_3}(\Omega),t) - f(\mathbf{q},\mathbf{p},t)\right]\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\Omega\,, \qquad (*)$$

wobei $f(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ die Dichte der Gasteilchen ist.

M Aufgabe 15: *Streuung*

Ein zweidimensionales Gas streue an harten Scheiben mit Radius a. Zeigen Sie, dass bei Streuung unter dem Streuwinkel θ, der Stoßparameter b, der differentielle Streuquerschnitt $d\sigma$ und der totale Streuquerschnitt σ_{tot} gegeben sind durch

$$b = a\cos\frac{\theta}{2}; \quad d\sigma = \frac{a}{2}\sin\frac{\theta}{2}d\theta; \quad \text{und} \quad \sigma_{\text{tot}} = 2a.$$

S Aufgabe 16 (10 Punkte): *Diffusionsgleichung (3+1+4+2 Punkte)*

Definieren Sie die Teilchendichte $n(\mathbf{q},t) \equiv \int f(\mathbf{q},\mathbf{p},t)\,\mathrm{d}^3p$ und den dazugehörigen Teilchenstrom $\mathbf{j}(\mathbf{q},t) \equiv \int \frac{\mathbf{p}}{m} f(\mathbf{q},\mathbf{p},t)\,\mathrm{d}^3p$.

(a) Zeigen Sie, dass damit aus $(*)$ die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}n(\mathbf{q},t) + \nabla_q\cdot\mathbf{j}(\mathbf{q},t) = 0.$$

folgt.

Mit dem 1. Fick'schen Gesetz $\mathbf{j}(\mathbf{q},t) = -D\cdot\nabla_q n(\mathbf{q},t)$ führt dies zur Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}n(\mathbf{q},t) = D\nabla_q^2 n(\mathbf{q},t).$$

mit der Diffusionskonstanten D.

(b) Lösen Sie die stationäre Diffusionsgleichung in 1D für die Randbedingungen $n(0,t) = 2$ und $n(1,t) = 1$.

(c) Lösen Sie die Diffusionsgleichung in 1D für die Anfangsbedingung $n(q,0) = \delta(q)$ und die Randbedingungen $\lim\limits_{|q|\to\infty} n(q,t) = 0$. Was ergibt sich für $\langle x^2\rangle$? Plotten Sie ferner $n(q,t)$ für $D\cdot t = 0.1, 1, 10, 100$.

(d) Leiten Sie die Dispersionsrelation der diffusiven Moden her:

$$\omega = -iDk^2,$$

und interpretieren Sie das Resultat.