Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Dr. Johannes Blaschke (Sprechstunde: Mi 10:00-11:00 in EW 708)

6. Übungsblatt – Statistische Physik

Abgabe/Vorrechnen: Mo. 01.06.2015 im Tutorium (16:00 - 17:30 EW 731)

S Aufgabe 19 (10 Punkte): *Linearisierte hydrodynamische Gleichungen (2+3+2+3 Punkte)*

Betrachten Sie die hydrodynamischen Gleichungen mit Dissipation

$$\frac{\partial}{\partial t} n = -\nabla \cdot (n\boldsymbol{u}) \tag{4.51}$$

$$mn\frac{d}{dt}\boldsymbol{u} = -\nabla(nk_BT) + \eta\nabla^2\boldsymbol{u} + \frac{1}{3}\eta\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) \tag{4.52}$$

$$\frac{d}{dt}T = \frac{2\kappa}{3nk_B}\nabla^2 T - \frac{2}{3}T\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \frac{2}{3nk_B}\underline{\underline{T}}' : \nabla\otimes\boldsymbol{u}\,. \tag{4.53}$$

mit Teilchenzahldichte n, Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{u}$, Masse m, Viskosität η, Wärmeleitfähigkeit κ, Temperatur T und Spannungsdeviator $\underline{\underline{T}}'$.

(a) Setzen Sie nun $n = \bar{n} + \delta n$, $T = \bar{T} + \delta T$ und $\boldsymbol{u} = 0 + \boldsymbol{u}$, mit den Gleichgewichtswerten $\bar{n}$ und $\bar{T}$, und linearisieren Sie die hydrodynamischen Gleichungen in δn, δT and $\boldsymbol{u}$.

(b) Für ebene Wellen mit $e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$ sind die Eigenmoden des Systems die Lösungen der Matrixgleichung

$$\omega \begin{pmatrix} \delta n \\ u_\alpha \\ \delta T \end{pmatrix} = \mathbf{M}(\boldsymbol{k}) \begin{pmatrix} \delta n \\ u_\beta \\ \delta T \end{pmatrix}\,. \tag{$*$}$$

Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{M}(\boldsymbol{k})$. Hinweis: u_α sind die drei Komponenten von $\boldsymbol{u}$, d.h. $\mathbf{M}(\boldsymbol{k})$ ist eine 5×5 Matrix.

(c) In der “Hydrodynamik nullter Ordung“ wird die Dispersion vernachlässigt: $\eta = \kappa = 0$. Das heißt das Gleichungssystem $(4.51) - (4.53)$ wird vereinfacht zu dem System $(4.42) - (4.44)$. Berechnen Sie für diesen Fall die fünf Lösungen von $(*)$. Geben Sie außerdem die Eigenfrequenzen und Eigenvektoren an und diskutieren Sie diese.

(d) Berechnen Sie die Eigenfrequenzen bis zur zweiten Ordnung im Wellenvektor k^2 für endliche η und κ (“Hydrodynamik erster Ordnung“). Diskutieren Sie die Ergebnisse.

M Aufgabe 20: *Energie Fluktuationen im kanonischen Ensemble*

(a) Zeigen Sie, dass im kanonischen Ensemble $\ln\mathcal{Z}(\beta)$ die erzeugende Funktion der Kumulanten der inneren Energie U ist:

$$\langle U^n\rangle_c = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial\beta^n}\ln\mathcal{Z}(\beta)\,. \tag{5.19}$$

(b) Leiten Sie den Zusammenhang

$$\langle U^2\rangle_c = k_BT^2C_v\,, \tag{5.22}$$

zwischen der zweiten Kumulante und der spezifischen Wärme $C_v = \frac{\partial\langle U\rangle}{\partial T}\Big|_{V,N}$ her.

S **Aufgabe 21 (5 Punkte):** *Phasenraumvolumen und Entropie des idealen Gases*

(a) Sei $\Omega(U)$ die Anzahl der Zustände mit Energie kleiner oder gleich U für ein Gas N nicht wechselwirkender Teilchen im Volumen V. Zeigen Sie, dass

$$\Omega(U) \propto V^N U^{3N/2} \,. \tag{5.4}$$

Bestimmen Sie die Proportionalitätskonstante.

(b) Zeigen Sie, dass für die Entropie des idealen Gases die Sackur-Tetrode-Formel gilt:

$$S(U) = k_B \ln g(U) = k_B \ln\left(\frac{1}{N!h^{3N}}\Omega(U)\right) = Nk_B\left(\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{4\pi m U}{3Nh^2}\right)^{3/2}\right] + \frac{5}{2}\right) \,. \tag{5.7}$$

Achtung: Um exakt diese Formel herzuleiten, muss man die Stirling Formel in der Näherung $\ln N! \approx N \ln N - N$ verwenden. Mit der üblichen Approximation, $\ln N! \approx N \ln N$ fehlt der Summand $5/2$!

(c) Leiten Sie die Zustandsgleichung des idealen Gases her.