

Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
 Dr. Johannes Blaschke (Sprechstunde: Mi 10:00-11:00 in EW 708)

9. Übungsblatt – Statistische Physik

Abgabe/Vorrechnen: Mo. 22.06.2015 im Tutorium (16:00 - 17:30 EW 731)

M Aufgabe 29: *Virialkoeffizienten eines Gases harter Kugeln*

Der zweite und dritte Virialkoeffizient, $B_2(T)$ und $B_3(T)$ sind definiert als

$$B_2(T) = -\frac{1}{2V} \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 f(\mathbf{r}_{21})$$

$$B_3(T) = -\frac{1}{3V} \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{r}_3 f(\mathbf{r}_{21})f(\mathbf{r}_{31})f(\mathbf{r}_{32})$$

mit $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ und $f(\mathbf{r}) = (e^{-\beta V(\mathbf{r})} - 1)$.

Betrachten Sie ein Gas harter Kugeln im Volumen V mit

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} \infty, & |\mathbf{r}| < R \\ 0, & |\mathbf{r}| > R \end{cases}.$$

- (a) Berechnen Sie $B_2(T)$. Verwenden Sie dazu als Integrationsvariablen $\mathbf{q} \equiv \mathbf{r}_{21}$ und $\mathbf{Q} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$. Geben Sie die Zustandsgleichung an.
- (b) Berechnen Sie $B_3(T)$. Verwenden Sie dazu als Integrationsvariablen \mathbf{r}_1 , $\mathbf{q} \equiv \mathbf{r}_{31} - \mathbf{r}_{21}$ und $\mathbf{Q} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{31} + \mathbf{r}_{21})$. Das Integral über \mathbf{Q} kann man geometrisch auswerten. Geben Sie die Zustandsgleichung an.

S Aufgabe 30 (10 Punkte): *Zweiter Virialkoeffizient eines idealen Fermi Gases*

Die quantenmechanische großkanonische Zustandssumme eines Fermigas mit Eigenmodenenergien ϵ_k lautet

$$(1) \quad \mathcal{Z}_G = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + e^{\beta(\mu - \epsilon_k)}).$$

Für freie Teilchen mit Masse m gilt $\epsilon(\mathbf{k}) = \hbar^2 k^2 / (2m)$. Das Gas befinde sich in einem Behälter mit Volumen V .

- (a) Zeigen Sie, dass im Kontinuumslimit ($\sum_k \rightarrow \frac{2V}{(2\pi)^2} \int d^3k$), Eq. (1) zu

$$\rho = \frac{N}{V} = C \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{\epsilon^{1/2} \lambda e^{-\beta\epsilon}}{1 + \lambda e^{-\beta\epsilon}}$$

$$pV = C k_B T V \int_0^{\infty} d\epsilon \epsilon^{1/2} \ln(1 + \lambda e^{-\beta\epsilon})$$

führt, wobei $\lambda = e^{\beta\mu}$ und $C = (2m/\hbar^2)^{3/2} / (2\pi^2)$ für Fermionen.

- (b) Leiten Sie unter der Annahme eines kleinen λ folgende Ausdrücke her.

$$(2) \quad \rho = \frac{1}{\Lambda^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \lambda^n}{n^{3/2}}$$

$$\frac{p}{k_B T} = \frac{1}{\Lambda^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \lambda^n}{n^{5/2}}$$

und bestimmen Sie Λ .

- (c) Bringen Sie Eq. (2) in die Form $\lambda = a_0 + a_1 \rho + a_2 \rho^2 + \dots$ (bis zur zweiten Ordnung).
- (d) Berechnen Sie damit den zweiten Virialkoeffizienten $B_2(T)$ und interpretieren Sie dessen Vorzeichen.