Prof. Dr. Sabine H. L. Klapp
Dr. Alice von der Heydt
Inst. f. Theoret. Physik, TU Berlin

Blatt 3

Abgabe: Do., 07.05.2015, 10:15 Uhr, in/vor der Vorlesung
Bitte Lösungen großzügig kommentieren und mit Namen versehen!

Aufgabe 7. *Mastergleichung, stationäre Lösung* (2 Punkte)

Für die Wahrscheinlichkeit $P(E_n, t)$, ein System mit diskreten Energieniveaus $\{E_n\}$ zur Zeit t im Zustand n anzutreffen, gelte die Mastergleichung

$$\frac{\mathrm{d}P(E_n,t)}{\mathrm{d}t} = \sum_m \big\{ w(n|m)P(E_m,t) - w(m|n)P(E_n,t) \big\},$$

mit den Übergangsraten

$$w(n|m) = \frac{\mathrm{e}^{-\beta E_n}}{\cosh\{\beta(E_n+E_m)\}}$$

($\beta := k_\mathrm{B}T$). Zeigen Sie, dass die stationäre Lösung der Mastergleichung die kanonische (Gleichgewichts-) Verteilung $\varrho(E_n) = \frac{1}{Z}\mathrm{e}^{-\beta E_n}$ ist.

Aufgabe 8. *Kontinuierliche Zufallsbewegung und Diffusionsgleichung* (5 Punkte)

Betrachten Sie ein Ensemble von Zufallswanderern in einer räumlichen Dimension: In jedem Zeitintervall Δt ändert sich die Position um einen zufälligen Schritt ℓ:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \ell(t)$$

Die zeitunabhängige Wahrscheinlichkeitsdichte der Schritte, $p(\ell)$, habe Mittelwert Null und Varianz (mittlere quadratische Schrittlänge) a^2. Die „typische" Schrittlänge a sei klein gegen die Breite der resultierenden Wahrscheinlichkeitsdichte $\varrho(x,t)$, ggf. für hinreichend große Zeiten t, ebenso sei die Änderung von $\varrho(x,t)$ im Intervall Δt klein (Separation von Längen- und Zeitskalen). Zeigen Sie, dass unter diesen Annahmen für die Zeitentwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte $\varrho(x,t)$ die Diffusionsgleichung (siehe Vorlesung und **Aufgabe 9.**) gilt.

Aufgabe 9. *Lösungen der Diffusionsgleichung* (7 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe von Fouriertransformationen Lösungen der Diffusionsgleichung in einer räumlichen Dimension,

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x,t) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x,t),\ D \text{ der Diffusionskoeffizient,}$$

für folgende Anfangsverteilungen (z. B. der Teilchenkonzentration) $n(x, t = 0)$:

a) $n(x,0) = n_0\,\delta(x)$

b) $n(x,0) = n_0\,\mathrm{rect}_a(x)$, $\mathrm{rect}_a(x) := \begin{cases} 1/a, & |x| \le a/2 \\ 0, & |x| > a/2 \end{cases}$

c) $n(x,0) = n_0 \cos(x)$

Aufgabe 10. *Leistungsspektrum stationärer Prozesse* (6 Punkte)

Verwenden Sie das *Wiener-Khinchin-Theorem* (vgl. Vorlesung), um das Leistungsspektrum $S(\omega)$ von stationären Zufallsprozessen $X(t)$ mit Erwartungswert $\langle X(t) \rangle = 0$ und den folgenden Autokorrelationsfunktionen $G(\tau) = \langle X(t)X(t+\tau) \rangle$ zu bestimmen:

a) $G(\tau) \propto \delta(\tau)$ (Wieso wird der zugehörige Prozess oft „weißes Rauschen“ genannt?)

b) $G(\tau) \propto \exp\left\{-\left(\tau/\tau_R\right)^2\right\}$

c) $G(\tau) \propto \cos\tau$