Prof. Dr. Sabine H. L. Klapp
Dr. Alice von der Heydt
Inst. f. Theoret. Physik, TU Berlin

Blatt 4

Abgabe: **Fr., 15.05.2015**, 10:15 Uhr, in/vor der Vorlesung
Bitte Lösungen großzügig kommentieren und mit Namen versehen!

Aufgabe 11. *Mastergleichung, 'asymmetric random walk'* (4 Punkte)

Die Mastergleichung für ein System mit N möglichen Zuständen lautet

$$\frac{\partial P_n(t)}{\partial t} = \sum_{m=1}^{N} \big\{ w(n|m) P_m(t) - w(m|n) P_n(t) \big\},$$

wobei $P_n(t)$ die Wahrscheinlichkeit ist, das System zur Zeit t im Zustand n anzutreffen, $n, m \in \{1, 2, \dots, N\}$, und $w(n|m)$ die Übergangsrate von m nach n bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass die Mastergleichung mit der *Übergangsmatrix* $\underline{\underline{W}}$ mit Einträgen $W_{nm} = w(n|m) - \delta_{nm} \sum_{n'=1}^{N} w(n'|n)$ und dem Wahrscheinlichkeitsvektor $\underline{P}(t)$ kompakt geschrieben werden kann als

$$\frac{\partial \underline{P}(t)}{\partial t} = \underline{\underline{W}}\, \underline{P}(t).$$

b) Betrachten Sie einen asymmetrischen 'random walk' durch ein zyklisches 4-Zustands-System mit folgenden Übergangsraten:

$$w(1|4) = w(4|3) = w(3|2) = w(2|1) = \frac{3}{4},$$
$$w(1|2) = w(2|3) = w(3|4) = w(4|1) = \frac{1}{4},\ w(n|m) = 0 \text{ sonst.}$$

Geben Sie die Übergangsmatrix $\underline{\underline{W}}$ an, und bestimmen Sie die stationäre Lösung.

Aufgabe 12. *Langevin-Gleichung für harmonisch gebundenes Teilchen* (10 Punkte)

Die eindimensionale Bewegung eines Brown'schen Teilchens mit Masse m, Ort $x(t)$ und Geschwindigkeit $v(t)$ im harmonischen Potential $U(x) = \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2$ wird beschrieben durch die *Langevin-Gleichungen*

$$\dot{x}(t) = v(t)$$
$$\dot{v}(t) = -\gamma v(t) - \omega_0^2 x(t) + f(t)$$

Dabei ist $\gamma > 0$ der Reibungskoeffizient und $f(t)$ die stochastische „Kraft", die räumlich und zeitlich delta-korrelierte Stöße mit den mikroskopischen (Flüssigkeits-) Teilchen modelliert,

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t_1) f(t_2) \rangle = \Gamma \delta(t_2 - t_1),$$

mit dem Erwartungswert $\langle \cdot \rangle$ bzgl. der Realisierungen dieses stochastischen „Rauschens" und der Stärke Γ. Anfangsort und -geschwindigkeit seien $x(t=0) = x_0$ und $v(t=0) = v_0$.

a) Lösen Sie die Langevin-Gleichung für eine Realisierung des Rauschens.

b) Befindet sich das Brown'sche Teilchen im Gleichgewicht mit der umgebenden Flüssigkeit der Temperatur T, dann gilt der Gleichverteilungssatz

$$\frac{m}{2}\omega_0^2\big\langle x_0^2\big\rangle_T = \frac{m}{2}\big\langle v_0^2\big\rangle_T = \frac{k_{\mathsf{B}}T}{2},$$

wobei $\big\langle\cdot\big\rangle_T$ den Erwartungswert über alle Anfangskonfigurationen (x_0, v_0) im kanonischen Ensemble bezeichnet. Anfangsort und -geschwindigkeit sollen unabhängig sein, $\big\langle x_0 v_0\big\rangle_T = 0$. Zeigen Sie durch Berechnen der Geschwindigkeitsautokorrelationsfunktion $\langle v(t_1)v(t_2)\rangle$, dass der Prozess für $m\Gamma = 4k_{\mathsf{B}}T\gamma$ stationär wird.

c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsautokorrelation im Gleichgewicht $\big\langle\langle v(t_1)v(t_2)\rangle\big\rangle_T$ für $t_1 < t_2$.

Aufgabe 13. *Wiener-Khinchin-Theorem für Brown'schen harmonischen Oszillator* (6 Punkte)

Bestimmen Sie für das Brown'sche Teilchen im harmonischen Potential aus **Aufgabe 12.** die Korrelationsfunktion $G(\tau) := \big\langle\langle v(t)v(t+\tau)\rangle\big\rangle_T$ für den Schwingfall $4\omega_0^2 > \gamma^2$, und daraus das Leistungsspektrum $S(\omega)$. Stellen Sie sowohl $G(\tau)$ als auch $S(\omega)$ für $k_{\mathsf{B}}T = 1$, $m = 1$, $\gamma = 1$ und $\omega_0 = 1$ graphisch dar, und diskutieren Sie die Ergebnisse kurz.