Prof. Dr. Sabine H. L. Klapp
Dr. Alice von der Heydt
Inst. f. Theoret. Physik, TU Berlin

Blatt 7

Abgabe: Do., 11.06.2015, 10:15 Uhr, in/vor der Vorlesung
Bitte Lösungen großzügig kommentieren und mit Namen versehen!

Aufgabe 18. *Fokker-Planck-Gleichung für eine dynamische Variable* (10 Punkte)

In der Vorlesung wurde aus der Kramers-Moyal-Entwicklung (für $K^{(n)}_{i_1\ldots i_n} = 0$ für $n \geq 3$) die Fokker-Planck-Gleichung für eine dynamische Variable $x(t)$ hergeleitet,

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = \hat{L}_{\mathsf{FP}} P(x,t),$$

mit dem Fokker-Planck-Operator

$$\hat{L}_{\mathsf{FP}} = -\frac{\partial}{\partial x} K^{(1)}_x(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} K^{(2)}_{xx}(x,t)$$

a) Geben sie für die eindimensionale Langevin-Gleichung

$$\dot{v}(t) = -\gamma v(t) + f(t),$$

mit Reibungskoeffizient γ und gaußverteiltem weißem Rauschen, charakterisiert durch $\langle f(t)\rangle = 0$ und $\langle f(t_1) f(t_2)\rangle = \Gamma\delta(t_1 - t_2)$, den Fokker-Planck-Operator an, und bestimmen Sie die Lösung $P(v,t)$ der Fokker-Planck-Gleichung: Durch zweifache Fouriertransformation [(ψ,ω) konjugiert zu (v,t)] erhalten Sie

$$\frac{\partial \ln \hat{\tilde{P}}(\psi,\omega)}{\partial \psi} = \frac{i\omega}{\gamma\psi} - \frac{\Gamma\psi}{2\gamma},$$

und die bei der Integration über ψ auftretende Integrations-"Konstante" $\ln \hat{C}(\omega)$ bzw. (Fourier-Rücktransformation) $C(t = s)$ mit $s := -\gamma^{-1}\ln\psi$ (o.B.d.A. $\psi > 0$) bestimmen Sie durch die Anfangsverteilung $P(v, t = 0) = \delta(v - v_0)$ oder $\tilde{P}(\psi, t = 0) = \mathrm{e}^{i\psi v_0}$. Bevor Sie bezüglich ψ rücktransformieren, substituieren Sie wieder $\mathrm{e}^{-\gamma s} = \psi$. Im Limes $t \to \infty$ bzw. als stationäre Lösung sollte sich die Maxwell-Boltzmann-Verteilung ergeben (vgl. Vorlesung).

b) Betrachten Sie die *überdämpfte* Langevin-Gleichung für einen eindimensionalen Brownschen harmonischen Oszillator

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v(t) \\ 0 &= -\gamma v(t) - \omega_0^2 x(t) + f(t) \end{aligned}$$

Geben Sie den Fokker-Planck-Operator an, und bestimmen Sie die *stationäre* Lösung der Fokker-Planck-Gleichung.

Aufgabe 19. *Smoluchowski-Gleichung: Sedimentation von Brownschen Teilchen* (10 Punkte)

Für die Wahrscheinlichkeitsdichte $P(\underline{r},t)$ für die Position $\underline{r} := (x,y,z)$ zur Zeit t eines Brownschen (z. B. Kolloid-) Teilchens mit Masse m im Schwerefeld (Gravitationsbeschleunigung g in z-Richtung) gilt die Smoluchowski-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\underline{r},t) = D\nabla^2 P(\underline{r},t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \cdot \nabla P(\underline{r},t)$$

mit der Diffusionskonstanten D und $c := Dmg/(k_\mathrm{B}T)$ (bei Temperatur T). Die Anfangsposition des Teilchens sei $(0,0,z_0>0)$.

a) Verwenden Sie einen Separationsansatz $P(\underline{r},t) = u(x,t)v(y,t)w(z,t)$, um zu zeigen, dass $P(\underline{r},t) = u(x,t)u(y,t)w(z,t)$, mit

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4Dt}\right\},$$

und für $w(z,t)$ die folgende partielle Differentialgleichung (PDGL) gilt:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\frac{\partial^2}{\partial z^2} - c\frac{\partial}{\partial z}\right) w(z,t) = 0$$

Da der Einfluss der Gravitation so von der Diffusion in x- und in y-Richtung entkoppelt, können wir uns im Folgenden auf die Bewegung in z-Richtung konzentrieren.

b) Die xy-Ebene bei $z=0$ sei für das Brownsche Teilchen undurchlässig, also eine Begrenzungsebene für die Bewegung. Begründen Sie für diese Anordnung und die o.g. Startposition die folgenden Anfangs- bzw. Randbedingungen:

$$w(z,t=0) = \delta(z-z_0), \qquad \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{mg}{k_\mathrm{B}T}\right) w(z,t)\bigg|_{z=0} = 0 \ \forall t>0.$$

Betrachten Sie den Ansatz

$$w(z,t) = \eta(z,t) \exp\left\{-\frac{c(z-z_0)}{2D} - \frac{c^2 t}{4D}\right\},$$

um eine einfachere PDGL für $\eta(z,t)$ zu erhalten. Wie lauten die entsprechenden Randbedingungen für $\eta(z,t)$?

c) Trotz der Randbedingungen lässt sich mit einer Methode analog zur Bildladungsmethode in der Elektrostatik die Diffusionsgleichung für $\eta(z,t)$ folgendermaßen lösen:

$$\eta(z,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \left[\exp\left\{-\frac{(z-z_0)^2}{4Dt}\right\} + \exp\left\{-\frac{(z+z_0)^2}{4Dt}\right\}\right] + \frac{mg}{k_\mathrm{B}T\sqrt{4\pi Dt}} \int_{z_0}^{\infty} \mathrm{d}z' \exp\left\{-\frac{(z'+z)^2}{4Dt} + \frac{c(z'-z_0)}{2D}\right\}$$

Verifizieren Sie, dass die angegebene Lösung die Randbedingungen erfüllt, und geben Sie die Lösung $w(z,t)$ des ursprünglichen Problems an (Skizze für verschiedene Zeiten hilfreich). Im Limes $t \to \infty$ erhalten Sie die bekannte Dichteverteilung im Gleichgewicht; welches ist demnach die mittlere Höhe des Teilchens im Gleichgewicht?