

Prof. Dr. Andreas Knorr
 Dr. Alexander Carmele
 Dr. Florian Wendler

3. Übungsblatt – Theoretische Festkörperphysik I,II

Abgabe: Mo. 23.05.2016 bis 10:00 Uhr in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen.

Aufgabe 3 (20 Punkte): Plasmonen

In dieser Aufgabe sollen die kollektiven Anregungen des Elektronengases untersucht werden. Dabei soll eine Gleichung zur Bestimmung der Dispersionsrelation $\omega_{PI}(\vec{q})$ der neuen Quasiteilchen, Plasmonen genannt, gefunden werden.

(a) Wiederholen Sie zunächst, dass sich die Elektronendichte des homogenen Elektronengases ρ darstellen läßt als:

$$\rho(\vec{r}, t) = -\frac{e}{V} \sum_{\vec{Q}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \rho_{\vec{Q}}(\omega) e^{-i\omega t + i\vec{Q} \cdot \vec{r}} \quad \text{mit} \quad \rho_{\vec{Q}} = \sum_{\vec{k}, s} \langle a_{\vec{k}-\vec{Q}, s}^\dagger a_{\vec{k}, s} \rangle.$$

(b) Stellen Sie nun die Heisenberg-Bewegungsgleichung für $\langle a_{\vec{k}-\vec{Q}, s}^\dagger a_{\vec{k}, s} \rangle$ auf. Nutzen Sie dazu den aus der VL bekannten Elektronengas-Hamiltonian:

$$\hat{H} = \underbrace{\sum_{\vec{k}, s} \varepsilon_{\vec{k}, s} a_{\vec{k}, s}^\dagger a_{\vec{k}, s}}_{\hat{H}_0} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{\substack{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q} \\ s_1, s_2}} V_{\vec{q}} a_{\vec{k}_1 + \vec{q}, s_1}^\dagger a_{\vec{k}_2 - \vec{q}, s_2}^\dagger a_{\vec{k}_2, s_2} a_{\vec{k}_1, s_1}}_{\hat{H}_{el-el}}.$$

(c) Um das auftretende Hierarchieproblem (berechnete Erwartungswerte $\langle a^\dagger a \rangle$ koppeln an höhere Erwartungswerte $\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle$) zu lösen, führen Sie eine Hartree-Fock-Faktorisierung der 4er-Erwartungswerte durch.

(d) Vernachlässigen Sie zusätzlich Spinkohärenzen ($\delta_{s,\lambda}$) und nehmen Sie nur Erwartungswerte mit, die elektronische Dichten ($\sigma_{\vec{k}, \vec{k}}^{ss} := \langle a_{\vec{k}, s}^\dagger a_{\vec{k}, s} \rangle$) und deren räumliche Fluktuationen beschreiben ($\sigma_{\vec{k}-\vec{Q}, \vec{k}}^{ss} := \langle a_{\vec{k}-\vec{Q}, s}^\dagger a_{\vec{k}, s} \rangle$). Damit erhält man folgende Bewegungsgleichung:

$$(1) \quad -i\hbar \partial_t \sigma_{\vec{k}-\vec{Q}, \vec{k}}^{ss} = \left(\varepsilon_{\vec{k}-\vec{Q}, s} - \varepsilon_{\vec{k}, s} \right) \sigma_{\vec{k}-\vec{Q}, \vec{k}}^{ss} + V_{\vec{Q}} \left(\sigma_{\vec{k}, \vec{k}}^{ss} - \sigma_{\vec{k}-\vec{Q}, \vec{k}-\vec{Q}}^{ss} \right) \sum_{\vec{k}', s'} \sigma_{\vec{k}'-\vec{Q}, \vec{k}'}^{s' s'} + \sum_{\vec{q}} V_{\vec{q}} \left(\sigma_{\vec{k}-\vec{q}, \vec{k}-\vec{q}}^{ss} - \sigma_{\vec{k}-\vec{Q}+\vec{q}, \vec{k}-\vec{Q}+\vec{q}}^{ss} \right) \sigma_{\vec{k}-\vec{Q}, \vec{k}}^{ss}.$$

Deuten Sie die einzelnen Terme.

Bitte Rückseite beachten! →

3. Übung TPVI SS2016

(e) In der VL wurde Gleichung (1) durch den Ansatz $\sigma_{\vec{k}-\vec{Q},\vec{k}}^{ss}(t) = e^{-i\omega t}\sigma_{\vec{k}-\vec{Q},\vec{k}}^{ss}(0)$ analytisch gelöst:

$$(2) \quad 1 = V_{\vec{Q}} \sum_{\vec{k}} \frac{f_{\vec{k}-\vec{Q}} - f_{\vec{k}}}{\hbar\omega_{\text{Pl}}(\vec{Q}) + (\tilde{\epsilon}_{\vec{k}-\vec{Q}} - \tilde{\epsilon}_{\vec{k}})},$$

wobei es sich bei $\tilde{\epsilon}$ um die renormalisierte Einteilchenenergie handelt. Um sich dieses Ergebnis zu veranschaulichen, plotten Sie mit einem Programm Ihrer Wahl (Gnuplot, Mathematica, Matlab, etc.) die rechte Seite der Bestimmungsgleichung (2) für einen beliebigen, aber festen Wert \vec{q} in Abhängigkeit von ω_{Pl} . Nehmen Sie dazu den eindimensionalen Spezialfall an ($\vec{k} = k$). Zusätzlich soll es sich im Nenner um die freien Teilchenenergien handeln $\tilde{\epsilon}_k = \epsilon_k$. Was bedeutet es also, die transzendente Gleichung (2) zu lösen und welche Lösung ist die kollektive Schwingungsmode?

Vorlesung:

- Dienstag 8:15 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203
- Donnerstag 8:15 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203

Übung:

- Mo 10:15-11:45 EW 731

Scheinkriterien: • Mindestens 60% der Übungspunkte.

Zettel:

- Ausgabe: Montags in der Übung.
- Abgabe: 14 Tage später in der Übung .
- Abgabe der Übungszettel in 2- oder 3-er Gruppen!

Sprechzeiten:

- Prof. Dr. Andreas Knorr: Di, 13–14 Uhr im EW 742
- Dr. Alexander Carmele : Fr, 10–11 Uhr im EW 704
- Dr. Florian Wendler : Mo, 12–13 Uhr im ER 221

Literatur

- Ashcroft, Mermin: Festkörperphysik (Oldenbourg)
- Czycholl: Theoretische Festkörperphysik (Springer)
- Haken: Quantenfeldtheorie des Festkörpers (Teubner)
- Haug, Koch: Quantum theory of the optical and electronic properties of semiconductors (World Scientific)
- Ibach, Lüth: Festkörperphysik (Springer)
- Jäger, Valenta: Festkörpertheorie (Wiley)
- Kittel: Quantenfeldtheorie des Festkörpers (Oldenbourg)
- Rössler: Solid State Theory (Springer)
- Scherz: Quantenmechanik (Teubner)
- Ziman: Prinzipien der Festkörpertheorie (Deutsch)