Dr. Marten Richter
Dr. Julia Kabuß

10. Übungsblatt – Theoretische Festkörperphysik I+II

Abgabe: Mo. 29.06.2015 vor Beginn der Übung im EW 226
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte Matrikelnummer auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 15 (6 Punkte): *Frenkel-Exzitonen*

Setzen Sie für die lokalisierten Exziton-Vernichter $B_{\mathbf{l}} = h_{\mathbf{l}} a_{\mathbf{l}}$ und Erzeuger $B_{\mathbf{l}}^\dagger \equiv a_{\mathbf{l}}^\dagger h_{\mathbf{l}}^\dagger$ (Ort l) die Entwicklung

$$B_{\mathbf{l}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} B_{\mathbf{k}}^\dagger, \quad B_{\mathbf{l}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} B_{\mathbf{k}} \tag{1}$$

an.

1. Zeigen Sie, dass für die Umkehrentwicklung gilt: $B_{\mathbf{k}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{l}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} B_{\mathbf{l}}^\dagger, \quad B_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{l}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}} B_{\mathbf{l}}$

2. Überführen Sie mithilfe von Gleichung (1) den Exziton Hamiltonian (Siehe VL und ÜB) in Diagonalgestalt:

$$H = \epsilon \sum_{l} B_{\mathbf{l}}^\dagger B_{\mathbf{l}} + \sum_{ll'} W(\mathbf{l} - \mathbf{l}') B_{\mathbf{l}}^\dagger B_{\mathbf{l}'} = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon(\mathbf{k}) B_{\mathbf{k}}^\dagger B_{\mathbf{k}} \tag{2}$$

3. Berechnen Sie die Kommutatorrelationen $[B_{\mathbf{k}}, B_{\mathbf{k}'}]_-$ und $[B_{\mathbf{k}}, B_{\mathbf{k}'}^\dagger]_-$ Unter welchen Bedingungen handelt es sich um eher bosonische Vertauschungsrelationen?

Aufgabe 16 (10 Punkte): *2-D Magneto Exzitonen*
Die Bewegung eines Exzitons in einem konstanten Magnetfeldes $\vec{H} = H\mathbf{e}_z$ ist gegeben durch den Magneto-Exziton-Hamiltonian:

$$H^{mx} = \sum_{i=e,h} \frac{1}{2m_i} \big[\mathbf{p}_i - \frac{q_i}{2c} \mathbf{H} \times \mathbf{r}_i\big]^2 - \frac{e^2}{\epsilon_0 |\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h|}. \tag{3}$$

Transformieren Sie den Hamiltonian von Gleichung 3 mithilfe der kanonischen Transformation T in den Hamiltonian der Relativ-Bewegung von Elektron e und Loch h:

$$T H^{mx} T^+ = H_r^{mx} = \sum_{i=e,h} \big[\mathbf{p}_i - \frac{q_i}{2c} \mathbf{H} \times \mathbf{r}\big]^2 - \frac{e^2}{\epsilon_0 r}, \tag{4}$$

wobei

$$T^+ = \exp\big[-i \frac{e}{2c} \mathbf{H} \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{r})\big] \tag{5}$$