Dr. Marten Richter
Dr. Julia Kabuß

4. Übungsblatt – Theoretische Festkörperphysik I+II

Abgabe: Mo. 18.05.2015 vor Beginn der Übung im EW 226
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte Matrikelnummer auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 5 (10 Punkte): *Hamiltonoperator in zweiter Quantisierung*

Gegeben sei der Hamiltonoperator in 2. Quantisierung:

$$H = \int \mathrm{d}\mathbf{r} \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \left(\frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right) \Psi(\mathbf{r}) \tag{1}$$

ohne Vielteilchenwechselwirkungen.

1. Berechnen Sie die Bewegungsgleichung für $\Psi(\mathbf{r}, t)$ mit Hilfe der Heisenbergbewegungsgleichung für ein Fermionisches und ein Bosonisches Feld $\Psi(\mathbf{r}, t)$. Zeigen Sie insbesondere, dass gilt:

$$\imath\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right) \Psi(\mathbf{r}, t) \tag{2}$$

   also die Schrödingergleichung für Feldoperatoren.

2. Zeigen Sie, dass für einen Hamiltonoperator der Form: $H = \sum_n \varepsilon_n a_n^\dagger a_n$ unter Verwendung der Heisenbergbewegungsgleichung, die Zeitabhängigkeit von a_n zu:

$$a_n^\dagger(t) = e^{\frac{\imath}{\hbar}\varepsilon_n (t-t_0)} a_n^\dagger(t_0) \tag{3}$$

   ergibt. Tun Sie dies sowohl für Bosonen als auch Fermionen.

3. Zeigen Sie unter Verwendung der vorherigen Punkte, dass aus dem Ansatz $\Psi(\mathrm{r}, t) = \sum_n a_n(t)\varphi_n(\mathbf{r})$ die Gültigkeit der stationären Schrödingergleichung:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right) \varphi_n(\mathbf{r}) = \varepsilon_n \varphi_n(\mathbf{r}) \tag{4}$$

   folgt.

Aufgabe 6 (10 Punkte): *Operatoren in zweiter Quantisierung: Bose-Operatoren*

In der VL wurden die bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren der quantisierten Gitterschwingung $\hat{b}^{\dagger}_{j,\vec{q}}$, $\hat{b}_{j,\vec{q}}$ mit Wellenvektor $\vec{q}$ in Mode j (LA,LO,TA,TO)]eingeführt.

1. Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle u \rangle$ sowie die Standardabweichung $\sigma^2 = \langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2$ der quantisierten Auslenkung $u = \sum_{j,q} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_j(q)mN}} \vec{A}_j(q) e^{iqR}(b^{\dagger}_{-qj} + b_{qj})$ für den Fall, dass sich das phononische System in den folgenden Zuständen befindet:

2. Fockzustand $|n_{q'i}\rangle$.

3. Kohärenter Zustand $|\alpha\rangle \equiv \sum_n e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$, wobei die Phononzahl n hier wieder der Mode $q'i$ zugeordnet sein soll.

4. Thermischer Zustand gegeben durch den statistischen Operator $\rho = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\hbar\omega_i(q)}{k_B T} b^{\dagger}_{q'i} b_{q'i}}$ mit $Z \equiv (1 - e^{-\frac{\hbar\omega_i(q)}{k_B T}})^{-1}$.

Diskutieren Sie das Ergebnis in den Spezialfällen hoher und verschwindender Auslenkungsintensitäten.