Dr. Marten Richter
Dr. Julia Kabuß

9. Übungsblatt – Theoretische Festkörperphysik I+II

Abgabe: Mo. 22.06.2015 vor Beginn der Übung im EW 226
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte Matrikelnummer auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 14 (10 Punkte): *Blochgleichungen: Korrelationsentwickliung + Hartree-Fock-Faktorisierung*

(i) Leiten Sie ausgehend vom Hamiltonoperator (siehe VL):

$$H = \sum_{\lambda k} \epsilon_{\lambda k} a^\dagger_{\lambda k} a_{\lambda k} + \sum_{qj} \hbar\omega_j(q) b^\dagger_{qj} b_{qj} + \sum_{\lambda,k,q,j,} D_{qj}(b^\dagger_{j,-q} + b_{j,q}) a^\dagger_{\lambda k+q} a_{\lambda k}. \tag{1}$$

mithilfe von Heisenbergs Bewegungsgleichung $\langle \dot{A} \rangle = \frac{i}{\hbar}[H, A]_-$ die Gleichungen für die beiden mikroskopischen Dichten $\rho_k^\lambda \equiv \langle a^\dagger_{\lambda k} a_{\lambda k} \rangle$ ($\lambda \in c, v$) und die Polarisation $p_k \equiv \langle a^\dagger_{vk} a_{ck} \rangle$ eines zwei-Band-Systems her:

$$i\hbar \dot{p}_k = (\epsilon_{ck} - \epsilon_{vk}) p_k + \sum_{jq} D_{jq} \big[S_{jq}^{vk,ck-q} - S_{jq}^{vk+q,ck} + T_{j-q}^{vk,ck-q} - T_{j-q}^{vk+q,ck} \big], \tag{2}$$

$$i\hbar \dot{\rho}_k^\lambda = \sum_{jq} D_{jq} \big[S_{jq}^{\lambda k,\lambda k-q} - S_{jq}^{\lambda k+q,\lambda k} + T_{j-q}^{\lambda k,\lambda k-q} - T_{j-q}^{\lambda k+q,\lambda k} \big], \tag{3}$$

wobei $S_{jq}^{\lambda k,\lambda' k'} \equiv \langle b_{jq} a^\dagger_{\lambda k} a_{\lambda' k'} \rangle$ und $T_{j-q}^{\lambda k,\lambda' k'} \equiv \langle b^\dagger_{j-q} a^\dagger_{\lambda k} a_{\lambda' k'} \rangle$ jeweils einfach assistierte elektronische Größen mit einem Phonon-Vernichter bzw. Erzeuger sind.
(ii) Bestimen Sie nun die Bewegnungsgleichungen für die Größen $S_{j-q}^{\lambda k,\lambda' k'}$ und $T_{j-q}^{\lambda k,\lambda' k'}$.
(iii) Wenden Sie nun bei den auftretenden 4er Termen aus Elektron- und Photon-Operatoren die Korrelationsentwicklung an. Zeigen Sie ausgehend von der vollen Faktorisierung, dass $\langle a^\dagger_{\lambda k} a_{\lambda' k'} b^\dagger_{qj} b_{q'j'} \rangle \approx \langle a^\dagger_{\lambda k} a_{\lambda' k'} \rangle \langle b^\dagger_{qj} b_{q'j'} \rangle \delta_{kk'} \delta_{jj'} \delta_{qq'}$. Benutzen Sie dazu, dass sich keine kohärenten Phononen im System befinden, also $\langle b^\dagger_{qj} \rangle = \langle b_{qj} \rangle = 0$ und, dass das System räumlich homogen angeregt wurde $\langle a^\dagger_{\lambda k} a_{\lambda' k'} \rangle = \langle a^\dagger_{\lambda k} a_{\lambda' k'} \rangle \delta_{kk'}$
(iv) Unter Anwendung der Hartree-Fock-Faktorisierung aus Aufgabe (9) und der Homogenitätsannahme erhalten Sie das gewünschte Ergebnis:

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{S}_{jq}^{\lambda k,\lambda' k'} &= (\epsilon_{\lambda' k'} - \epsilon_{\lambda k} + \hbar\omega_j(q)) S_{jq}^{\lambda k,\lambda' k'} + D_{jq} \sum_{\alpha\beta} [(n_{jq}+1) \sigma_k^{\lambda\alpha} (\delta_{\beta\lambda'} - \sigma_{k'}^{\beta\lambda'}) \\ &\quad - n_{jq} \sigma_{k'}^{\beta\lambda'} (\delta_{\lambda\alpha} - \sigma_k^{\lambda\alpha})], \end{aligned} \tag{4}$$

wobei $n_{jq} \equiv \langle b^\dagger_{qj} b_{qj} \rangle$ die mittlere Phononzahl in der mode qj ist und $\sigma_k^{\lambda\lambda'} \equiv \langle a^\dagger_{\lambda k} a_{\lambda' k} \rangle$ entweder eine Teilchendichte oder Polarisation darstellen.
(v) Diskutieren Sie Gleichungen.

Bitte Rückseite beachten!⟶

9. Übung TFKP SS15

Aufgabe 15 (10 Punkte): *Herleitung des Absorptionsspektrums*
Ein Absorptionsspektrum gemessen in einem homogenen Medium (ohne Grenzflächen) ist eine wichtige Größe. Die dabei gemessenen Größen und ihr Gültigkeitsbereich sollen in dieser Aufgabe abgeleitet werden.

1. Starten Sie von der Maxwellgleichung im Medium und zeigen Sie, dass für den Ansatz einer ebene Welle in z-Richtung laufende Welle $\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{\imath kz - \imath\omega t}$, die folgende Lösung $\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{\imath k' z - \imath\omega t - \kappa'_a z/2}$ mit $k'(\omega) = \frac{\omega\tilde{n}(\omega)}{c}$ und $\kappa'_a(\omega) = \frac{2\omega\kappa(\omega)}{c}$ gilt.

2. Wir zerlegen die Suszeptibiltät χ in Imaginär und Realteil $\chi(\omega) = \chi'(\omega) + \imath\chi''(\omega)$. Zeigen Sie die folgenden beiden Relationen

$$\tilde{n}(\omega) = \sqrt{\frac{1+\chi'(\omega)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(1+\chi'(\omega))^2 + \chi''(\omega)^2}} \tag{5}$$

$$\kappa(\omega) = \frac{\chi''(\omega)}{2\tilde{n}(\omega)} \tag{6}$$

   $\kappa(\omega)$ ist dabei der Absorptionskoeffizient der in einem Absorptionsspektrum gemessen wird.

3. In welchem Fall gilt:

$$\tilde{n}(\omega) = \sqrt{1+\chi'(\omega)}? \tag{7}$$