Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Vitaly Belik, Dr. Alexander Carmele
Mathias Hayn, Alexander Kraft

6. Übungsblatt – Thermodynamik und Statistik

Abgabe: Mi. 3. Juni 2015 bis 12:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 12 (1+1+6+3+3=14 Punkte): *Kritisches Verhalten im van der Waals-Gas*

Die thermische Zustandsgleichung des van der Waals-Gases lautet:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = k_{\mathrm{B}}T. \tag{1}$$

Hierbei sind p der Druck, V das Volumen und T die Temperatur des Gases, $v = V/N$ ist das spezifische Volumen und N ist die Anzahl der Gasteilchen. Die Parameter a, b bezeichnet man als Binnendruck, bzw. Kovolumen.
Das van der Waals-Gas verhält sich für hohe Temperaturen wie ein ideales Gas. Unterhalb einer kritischen Temperatur T_c findet jedoch ein Phasenübergang statt. Dieser ist im van der Waals-Modell dadurch charakterisiert, dass das Gas mechanisch instabil wird, d.h. dass die isotherme Kompressibiltät $\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ negativ wird.

(a) Erklären Sie zunächst, wieso ein Gas für $\kappa_T < 0$ mechanisch instabil ist.

(b) Berechnen Sie T_c, sowie den kritischen Druck p_c und das kritische spezifische Volumen v_c im kritischen Punkt.

(c) Zeigen Sie, dass die thermische Zustandsgleichung (1) ausgedrückt durch die kritischen Variablen $\tilde{p} := p/p_c$, $\tilde{v} := v/v_c$ und $\tilde{T} := T/T_c$ die Form

$$\left(\tilde{p} + \frac{3}{\tilde{v}^2}\right)(3\tilde{v} - 1) = 8\tilde{T} \tag{2}$$

annimmt und erklären Sie das Besondere dieser Form der thermischen Zustandsgleichung. Zeichnen Sie die Zustandsgleichung (2) für verschiedene Temperaturen und kennzeichnen Sie die Region der Instabilität für jede Isotherme.

Wir wollen nun untersuchen, wie sich das van der Waals-Gas in der Nähe des kritischen Punktes verhält. Dazu führen wir die reduzierten Variablen $\bar{p} := (p - p_c)/p_c$, $\bar{v} := (v - v_c)/v_c$ und $\bar{T} := (T - T_c)/T_c$ ein.

(d) Leiten Sie die um den kritischen Punkt näherungsweise gültige thermische Zustandsgleichung

$$\bar{p} \approx 4\bar{T} - 6\,\bar{v}\,\bar{T} - \frac{3}{2}\bar{v}^3 + 9\,\bar{v}^2\,\bar{T} \tag{3}$$

her. Terme höhere Ordnung in $\bar{T}$, bzw. $\bar{v}$ können Sie vernachlässigen.

(e) In der Nähe des kritischen Punktes zeigt $\bar{p}$ entlang der kritischen Isotherme und κ_T entlang der kritischen Isochore ein *universelles* Verhalten:

$$\bar{p} \sim \bar{\varrho}^{\,\delta}, \qquad \kappa_T \sim |\bar{T}|^{-\gamma}. \tag{4}$$

Hier ist $\varrho = 1/v$ die Teilchendichte und $\bar{\varrho} = (v_c - v)/v$ die entsprechend reduzierte Teilchendichte. Bestimmen Sie die kritischen Exponenten δ und γ.

Aufgabe 13 (3+2+5=10 Punkte): *Phasenübergang in magnetischen Systemen*
Analog zu gasförmigen Systemen kann man auch in magnetischen Systemen eine thermische Zustandsgleichung ableiten. Für einen Ferromagneten in einem äußeren Magnetfeld B lautet diese:

$$m = \tanh\left(m\frac{T_c}{T} + \beta B\right). \tag{5}$$

Dabei ist m die spezifische Magnetisierung des Ferromagneten, $T_c > 0$ die kritische Temperatur und $\beta = 1/(k_\mathrm{B}T)$.

(a) Die Gl. (5) ist eine implizite Gleichung für die spezifische Magnetisierung und kann nicht einfach nach m aufgelöst werden. Um zu verstehen, ob und welche Lösungen für m existieren, stellen Sie die Gl. (5) ohne ein äußeres Feld ($B = 0$) für Temperaturen $T > T_c$, $T = T_c$ und $T < T_c$ graphisch dar. Interpretieren Sie dies.

(b) Benutzen Sie Gl. (5) um zu zeigen, dass ohne ein äußeres Feld die spezifische Magnetisierung für Temperaturen $T \lesssim T_c$ durch

$$m \approx \sqrt{3(1 - T/T_c)} \tag{6}$$

genähert werden kann.

(c) Bestimmen Sie die magnetische Suszeptibilität,

$$\chi_T(B) = \left(\frac{\partial m}{\partial B}\right)_T, \tag{7}$$

in der Nähe der kritischen Temperatur für $B = 0$. Betrachten Sie dabei Temperaturen sowohl oberhalb als auch unterhalb von T_c und berechnen Sie die entsprechenden kritischen Exponenten γ, γ'.