Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Vitaly Belik, Dr. Alexander Carmele
Mathias Hayn, Alexander Kraft

7. Übungsblatt – Thermodynamik und Statistik

Abgabe: Mi. 10. Juni 2015 bis 12:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 14 (1+4+3=8 Punkte): *Chemisches Potential eines 2D Fermigases*

Gegeben sei ein zweidimensionales, offenes System (großkanonisches Ensemble) nichtwechselwirkender Fermionen der Masse m und dem Wellenvektor $\vec{k} = (k_x, k_y)$. Die Energie ε_k und die mittlere Besetzung f_k eines Niveaus mit den Indizes k_x, k_y sind gegeben durch,

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \text{mit} \quad k = |\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \quad f_k = \frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon_k - \mu)] + 1}.$$

Die mittlere Teilchenzahl $\bar{N}$ des System ist bekannt, ebenso die Temperatur T.

(a) Wie berechnet sich aus f_k die mittlere Teilchenzahl $\bar{N}$ des Systems ?

(b) Führen Sie die Summe aus (a) in ein Energieintegral über und diskutieren sie daran den Begriff der Zustandsdichte $D(\varepsilon)$ und zeichnen Sie diese. Die Zustandsdichte ist definiert durch

$$\sum_k f_k \equiv \int_0^\infty f(\varepsilon) D(\varepsilon) d\varepsilon.$$

(c) Berechnen Sie $\bar{N}$ und bestimmen Sie daraus das chemische Potential μ.

Aufgabe 15 (2+4+2=8 Punkte): *Zustandsgleichungen idealer Quantengase*

In der Vorlesung wurde die Verteilungsfunktion f für Fermionen und Bosonen hergeleitet:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)} + \sigma}, \tag{1}$$

mit $\sigma = +1$ für Fermionen und $\sigma = -1$ für Bosonen.

(a) Zeigen Sie, dass die mittlere Energie E eines Quantengases im großkanonischen Ensemble mithilfe der Verteilungsfunktion $f(\varepsilon)$ durch

$$E = \sum_j \varepsilon_j f(\varepsilon_j) \tag{2}$$

ausgedrückt werden kann. Summiert wird hier über alle Ein-Teilchen-Zustände.
Hinweis: Im großkanonischen Ensemble gilt die Relation $E = \partial_\beta(\beta J) + \mu\bar{N}$, mit dem großkanonischen Potential $J = -k_\mathrm{B}T \ln Z_{GK}$.

(b) Stellen Sie damit die kalorische Zustandsgleichung für spinlose ideale Quantengase auf:

$$E(T, V, \mu) = \frac{3}{2} k_\mathrm{B} T \frac{V}{\lambda_{th}^3} g^\sigma_{5/2}(z). \tag{3}$$

Dabei ist λ_{th} die thermische Wellenlänge, $z = \exp[\beta\mu]$ die Fugazität und

$$g_\nu(z) = \sum_{\ell=1}^\infty (-\sigma)^{\ell-1} \frac{z^\ell}{\ell^\nu} \tag{4}$$

ist die verallgemeinerte Riemann'sche Zeta-Funktion.

(c) Zeigen Sie, dass die thermische Zustandsgleichung für ideale Quantengase von der kalorischen Zustandsgleichung abhängt:

$$p(T, V, \mu) = \frac{2}{3} \frac{E(T, V, \mu)}{V}. \tag{5}$$

Dabei ist V das Volumen des Gases. **Hinweis:** Den Druck kann man im großkanonischen Ensemble aus der Zustandssumme gewinnen: $\beta p = -\partial_V (\beta J)$. Außerdem können Sie annehmen, dass μ unabhängig von V ist.