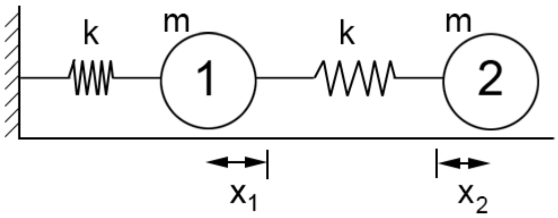
Prof. Dr. Harald Engel
Dr. Anna Zakharova, Jan Totz MSc, Anne-Kathleen Malchow BSc, Robert Salzwedel BSc, Manuel Katzer BSc, Christopher Wächtler BSc

10. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Bis Mi. 06.07.2016 18:00 im Briefkasten am Hintereingang des ER-Gebäudes
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 22 (10 Punkte): *Zwei Massen gekoppelt durch Federn*

Zwei Massepunkte mit gleicher Masse m bewegen sich reibungsfrei auf einer Platte (eindimensionale Bewegung). Wie in der Skizze dargestellt, sind sie mit zwei identischen Federn (Federkonstante k) untereinander und mit der Wand verbunden. Die Auslenkungen der Massen aus ihren Ruhepositionen ist mit x_1 und x_2 bezeichnet.



(a) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für das System her:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{1}$$

(b) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen (2) mit dem Ansatz: $x_i = A_i \cos \omega t$. Motivieren Sie den Ansatz. Welche alternativen Ansätze wären denkbar? Bestimmen Sie die beiden Normal- bzw. Eigenkreisfrequenzen ω_j und ordnen Sie diese der gleichphasigen oder gegenphasigen Normalschwingungsmode zu.

(c) Bestimmen Sie das Verhältnis der Schwingungsamplituden A_i der beiden Normalschwingungen und stellen Sie die allgemeine Lösung auf.

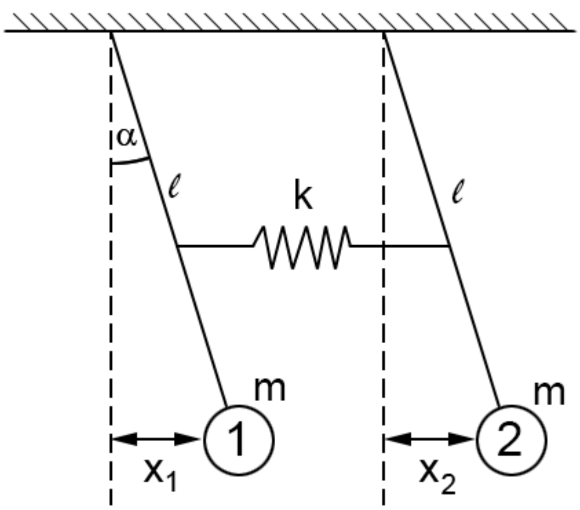
(d) Lösen Sie die Bewegungsgleichung (2) numerisch (Mathematica: NDSolve) und plotten Sie die Lösungen $x_i(t)$ über einen geeigneten Zeitraum. Vergleichen Sie die numerischen Lösungen mit den analytischen für $m = 1$, $k = 2$ und $x_1(0) = -0.1$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0.8$, sowie $\dot{x}_2(0) = 1.0$. Diskutieren Sie das Ergebnis.
Bonus: Bestimmen Sie passende Anfangsbedingungen, um reine Normalschwingungen zu erhalten und verifizieren Sie ihr Ergebnis mit einem Plot.
Bonus: Erstellen Sie eine Animation der Dynamik.

Bitte Rückseite beachten!⟶

10. Übung SS16

Aufgabe 23 (10 Punkte): *Gekoppelte Pendel*

Zwei Pendel von gleicher Masse m und gleicher Fadenlänge l sind über eine Feder mit Federkonstante k miteinander gekoppelt. Sie sollen in einer Ebene unter Einfluss der Gravitationskraft $F_G = mg$ schwingen, wobei g die Erdbeschleunigung ist. Die Auslenkungen aus der Ruhelage werden mit x_i beschrieben.



(a) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für das System her unter Ausnutzung der Näherung für kleine Auslenkungswinkel α:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\frac{g}{l}x_1 - \frac{k}{m}(x_1 - x_2) \\ \ddot{x}_2 &= -\frac{g}{l}x_2 - \frac{k}{m}(x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{2}$$

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem bestehend aus den Bewegungsgleichungen (2) mit den Anfangsbedingungen $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = A$, $A \in \mathbb{R}$ und $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ durch eine geeignete Variablentransformation und dem Ansatz: $u_i = A_i \cos\omega_i t + B_i \sin\omega_i t$ und bestimmen Sie die Eigenfrequenzen ω_i.

(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung (2) numerisch (Mathematica: NDSolve) und plotten Sie die Lösungen $x_i(t)$ über einen geeigneten Zeitraum. Vergleichen Sie die numerischen Lösungen mit den analytischen für $m = 1$, $k = 0.01$ und $A = 1$, sowie $\dot{x}_2(0) = 1.0$. Diskutieren Sie das Ergebnis.
Bonus: Erstellen Sie eine Animation der gekoppelten Pendel in der die Schwebung deutlich wird.