■ Beispiel: Ungedämpfte erzwungene Schwingungen um eine stabile Gleichgewichtslage

Wir betrachten eindimensionale Schwingungen eines harmonischen Oszillators unter dem Einfluss einer beliebigen zeitabhängigen Kraft F(t). Kleine Auslenkungen x(t) aus der stabilen Gleichgewichtslage $x = \dot{x} = 0$ genügen der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + kx = F(t) \text{ also } \ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m}F(t)\,,\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ - Kreisfrequenz .} \tag{1}$$

Diese inhomogene lineare ODE 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten lässt sich wegen $\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{d}{dt}\underbrace{(\dot{x} + i\omega x)} - i\omega(\dot{x} + i\omega x)$ mit Hilfe der Substitution

$$\varsigma(t) := \dot{x} + i\omega x \tag{2}$$

in die ODE 1. Ordnung

$$\dot{\varsigma} - i\omega\varsigma = \frac{1}{m}F(t) \tag{3}$$

überführen. Die allgemeine Lösung $\varsigma_a(t)$ der homogenen Gleichung $\dot{\varsigma}_a - i\omega\varsigma_a = 0$ lautet (Trennung der Variablen oder Exponentialansatz)

$$\varsigma_a(t) = A\,e^{i\omega t} \text{ mit der freien Konstanten A.} \tag{4}$$

Für die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung wird eine spezielle Lösung $\varsigma_s(t)$ von (3) benötigt, die wir durch Variation der Konstanten ermitteln. Der Lösungsansatz $\varsigma_s(t) = A(t)e^{i\omega t}$ ergibt eingesetzt in (3) $\frac{dA(t)}{dt}e^{i\omega t} + i\omega\varsigma_s(t) - i\omega\varsigma_s(t) = \frac{1}{m}F(t)$ bzw.

$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{m}F(t)e^{-i\omega t}$, also $A(t) = \frac{1}{m}\int^t dz\,F(z)e^{-i\omega z} + C$ und

$$\varsigma_s(t) = e^{i\omega t}\left(\frac{1}{m}\int^{t} dz\, F(z)\, e^{-i\omega z} + C\right) \quad . \tag{5}$$

Die allgemeine Lösung von (3) ist die Summe $\varsigma(t) = \varsigma_a(t) + \varsigma_s(t)$, also mit (4) und (5)

$$\varsigma(t) = e^{i\omega t}\left(\varsigma(t=0) + \frac{1}{m}\int_0^{t} dz\, F(z)\, e^{-i\omega z}\right), \quad \varsigma(t=0) = \varsigma_0\,. \tag{6}$$

Die Intergrationskonstanten A und C in (4) bzw. (5) sowie die untere Grenze des Integrals sind so gewählt, dass die Anfangsbedingungen $\varsigma(t=0)$ erfüllt werden.

Die gesuchte Lösung x(t) der Ausgangsgleichung (1) folgt aus $x(t) = \dfrac{\mathrm{Im}\{\varsigma(t)\}}{\omega}$ (F(t) reell!).

Für gegebene zeitabhängige Kräfte F(t) ergeben sich nach Berechnung des Integrals in (6) die Lösungen (prüfen!):

(i) $F = F_0 = \text{const}$ $\rightarrow$ $x(t) = \dfrac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t)\,.$

(ii) $F = a\,t$ $\rightarrow$ $x(t) = \dfrac{a}{m\omega^3}(\omega t - \sin\omega t)\,.$

(iii) $F = F_0\, e^{-\alpha t}$ $\rightarrow$ $x(t) = \dfrac{F_o}{m(\omega^2 + \alpha^2)}\left(e^{-\alpha t} - \cos\omega t + \dfrac{\alpha}{\omega}\sin\omega t\right).$

Die konstante Kraft (i) verschiebt die Gleichgewichtslage, um die die Schwingungen ausgeführt werden. Eine zu t proportionale Kraft (ii) führt zu unbegrenzt anwachsenden Auslenkungen.

10. Vektorintegration

10.1 Kurvenintegrale

Im R^3 seien das Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r})$ und die Raumkurve C mit Anfangspunkt $\underline{r}_a$ und Endpunkt $\underline{r}_b$ gegeben. Wir unterteilen C in Intervalle $\underline{r}_a = \underline{r}_0, \underline{r}_1, ..., \underline{r}_i, ..., \underline{r}_n = \underline{r}_b$ und bilden die Summe

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{A}(\underline{r}_i^{'}) \cdot \Delta \underline{r}_i \,,\ \underline{r}_i^{'} \in (\underline{r}_{i-1}, \underline{r}_i)\,.$$

Def.: Die skalare Größe

$$\int_{\underline{r}_a, C}^{\underline{r}_b} d\underline{r} \cdot \underline{A}(\underline{r}) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \underline{A}(\underline{r}_i^{'}) \cdot \Delta \underline{r}_i \,,\ \underline{r}_i^{'} \in (\underline{r}_{i-1}, \underline{r}_i)$$

heißt Kurvenintegral über das Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r})$ entlang der Kurve C zwischen den beiden Punkten $\underline{r}_a$ und $\underline{r}_b$, vorausgesetzt der Grenzwert existiert und ist unabhängig von der gewählten Intervalleinteilung auf C. Im allgemeinen Fall hängt der Wert des Integrals vom betrachteten Feld $\underline{A}(\underline{r})$, von der Form der Raumkurve C und von den Anfangs- und Endpunkten $\underline{r}_a$ bzw. $\underline{r}_b$ auf C ab.

Für die Berechnung von Kurvenintegralen bieten sich zwei Methoden an.

A) <u>Parametrisierung der Raumkurve C</u>

Ist $\underline{r}(t)$ eine Parameterdarstellung der Raumkurve C, kann das Kurvenintergral auf ein gewöhnliches Integral zurückgeführt werden, dessen Integrand eine skalare Funktion einer reellen Variablen t ist

$$\int_{\underline{r}_a, C}^{\underline{r}_b} d\underline{r} \cdot \underline{A}(\underline{r}) = \int_{t_a}^{t_b} dt\, \frac{d\underline{r}(t)}{dt} \cdot \underline{A}(\underline{r}(t)) \ ,\ t_a \text{ und } t_b \text{ aus } \underline{r}(t_a) = \underline{r}_a \text{ bzw. } \underline{r}(t_b) = \underline{r}_b\,.$$

Der Faktor $\underline{A}(\underline{r}(t))$ im Skalarprodukt gibt die Werte des Vektorfeldes $\underline{A}$ auf der Kurve C an, der Faktor $\frac{d\underline{r}(t)}{dt}$ enthält die Information über die Form der Kurve C.

B) Ohne Parametrisierung der Raumkurve C

Mit $d\underline{r} = dx\,\underline{e}_x + dy\,\underline{e}_y + dz\,\underline{e}_z$ und $\underline{A} = A_x(x,y,z)\underline{e}_x + A_y(x,y,z)\underline{e}_y + A_z(x,y,z)\underline{e}_z$ folgt

$$\int_{\underline{r}_a,C}^{\underline{r}_b} d\underline{r}\cdot\underline{A}(\underline{r}) = \int_{x_a}^{x_b} dx\;A_x(x,y(x),z(x)) + \int_{y_a}^{y_b} dy\;A_y(x(y),y,z(y)) + \int_{z_a}^{z_b} dz\;A_z(x(z),y(z),z)\,.$$

In den drei Summanden ist die Abhängigkeit zwischen $(x,y,z)\in C$ durch die Form der Kurve C bestimmt.

- **Gradientenfelder**

Wir untersuchen nun die Frage, unter welchen Bedingungen Kurvenintegrale nicht von der Form der Kurve C abhängen. Beispielsweise ist für das Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r}) = f(r)\,\underline{r}$ der Integrand in

$$\int d\underline{r}\cdot\underline{A}(\underline{r}) = \int d\underline{r}\cdot\underline{r}\;f(r) = \frac{1}{2}\int d(\underline{r}^2)\;f(r) = \frac{1}{2}\int d(r^2)\;f(r) = \int dr\;r\;f(r)$$

nicht von $\underline{r}$ sondern nur von $r = |\underline{r}|$ abhängig. Die Form der Kurve C spielt in einem Kurvenintegral über $\underline{A}(\underline{r})$ keine Rolle, ausreichend ist die Angabe des Anfangs- und Endpunktes.

Angenommen, $\underline{A}(\underline{r})$ sei ein stetiges Vektorfeld, für das das Kurvenintegral $\int_{\underline{r}_a,C}^{\underline{r}_b} d\underline{r}\cdot\underline{A}(\underline{r})$ gerade nicht von der Form der Kurve C abhängt.

Dann ist die Funktion $\Phi(\underline{r}) := \int_{\underline{r}_a}^{\underline{r}} d\underline{r}'\cdot\underline{A}(\underline{r}')$ <u>nicht</u> von der Wahl einer bestimmten Kurve C_1 zwischen den beiden Punkten $\underline{r}_a$ und $\underline{r}$ abhängig und auch $\Phi(\underline{r}+\Delta\underline{r}) := \int_{\underline{r}_a}^{\underline{r}+\Delta\underline{r}} d\underline{r}'\cdot\underline{A}(\underline{r}')$ ist unabhängig vom Weg C_2 von $\underline{r}_a$ nach $\underline{r}+\Delta\underline{r}$. Für die Differenz $\Phi(\underline{r}+\Delta\underline{r})$ und $\Phi(\underline{r})$ haben wir

$$\Phi(\underline{r}+\Delta\underline{r})-\Phi(\underline{r})=\int_{\underline{r}}^{\underline{r}+\Delta\underline{r}} d\underline{r}'\cdot\underline{A}(\underline{r}'),$$

denn wir können die Kurve C_2 zwischen $\underline{r}_a$ und $\underline{r}+\Delta\underline{r}$ so wählen, dass sie den Punkt $\underline{r}$ enthält. Die rechte Seite wandeln wir über den Mittelwertsatz der Integralrechnung um: $\int_{\underline{r}}^{\underline{r}+\Delta\underline{r}} d\underline{r}'\cdot\underline{A}(\underline{r}')=\underline{A}(\underline{r}'')\,\Delta\underline{r}$. Für die linke Seite gilt $\Phi(\underline{r}+\Delta\underline{r})-\Phi(\underline{r})=\mathrm{grad}\,\Phi(\underline{r}')\cdot\Delta\underline{r}$. Im Grenzfall $\Delta\underline{r}\to 0$ laufen $\underline{r}'$, $\underline{r}''\in\Delta\underline{r}$ auf $\underline{r}$ zu, d.h. $\lim\limits_{\Delta\underline{r}\to 0}\ \mathrm{grad}\,\Phi(\underline{r})\cdot\Delta\underline{r}=\underline{A}(\underline{r})\cdot\Delta\underline{r}$.

Für Nullfolgen in <u>beliebigen</u> Richtungen kann das nur gelten, wenn $\mathrm{grad}\,\Phi(\underline{r})=\underline{A}(\underline{r})$.

<u>Schlussfolgerung</u>: Damit $\Phi(\underline{r}):=\int_{\underline{r}_a}^{\underline{r}} d\underline{r}'\cdot\underline{A}(\underline{r}')$ unabhängig von der Form der Kurve zwischen den Punkten $\underline{r}_a$ und $\underline{r}$ ist, muss $\underline{A}(\underline{r})$ ein Gradientenfeld sein, d.h., es muss eine Funktion $\Phi(\underline{r})$ mit $\underline{A}(\underline{r})=\mathrm{grad}\,\Phi(\underline{r})$ existieren. Für gegebenes $\underline{A}(\underline{r})$ ist $\Phi(\underline{r})$ bis auf eine additive Konstante definiert, die Wahl der unteren Grenze $\underline{r}_a$ legt $\Phi(\underline{r})$ eindeutig fest.

Die Bedingung $\underline{A}(\underline{r})=\mathrm{grad}\,\Phi(\underline{r})$ ist nicht nur notwendig sondern auch hinreichend, denn dann ist

$$\int_{\underline{r}_a,\,C}^{\underline{r}_b} d\underline{r}\cdot\underline{A}(\underline{r})=\int_{\underline{r}_a,\,C}^{\underline{r}_b} d\underline{r}\cdot\mathrm{grad}\,\Phi(\underline{r})=\int_{\underline{r}_a,\,C}^{\underline{r}_b} d\Phi(\underline{r})=\Phi(\underline{r}_b)-\Phi(\underline{r}_a)$$

unabhängig von der Form der Kurve C. Zusammenfassend gilt:

Theorem: Kurvenintegrale $\int_C d\underline{r}\cdot\underline{A}(\underline{r})$ über ein Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r})$ sind genau dann unabhängig von der Form der Kurve C, wenn $\underline{A}$ als Gradient eines skalaren Feldes Φ darstellbar ist, $\underline{A}(\underline{r})=\mathrm{grad}\,\Phi(\underline{r})$.

Offensichtlich verschwinden unter dieser Bedingung Kurvenintegrale entlang geschlossener Kurven, d.h. $\oint_C d\underline{r}\cdot\underline{A}(\underline{r})=0$.

Das geschlossenen Kurvenintegral $\oint_C d\underline{r}\cdot\underline{A}(\underline{r})$ heißt Zirkulation von $\underline{A}(\underline{r})$ entlang C.

Wie sieht man einem Vektorfeld nun an, ob es ein Gradientenfeld ist oder nicht? Gradientenfelder sind wirbelfrei, für (zweifach stetig differenzierbare) $\Phi(\underline{r})$ gilt $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi(\underline{r}) = \underline{\nabla}\times\underline{\nabla}\Phi(\underline{r}) = 0$. Diese Bedingung ist auch hinreichend: Wenn $\underline{A}(\underline{r})$ in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G wirbelfrei ist, $\operatorname{rot}\underline{A}(\underline{r}) = 0$, so ist $\underline{A}(\underline{r}) = \operatorname{grad}\Phi(\underline{r})$ und Kurvenintergrale über $\underline{A}(\underline{r})$ sind Weg unabhängig.

Die Wirbelfreiheit $\underline{\operatorname{rot}\underline{A}(\underline{r}) = 0}$ ist ein nützliches, weil leicht überprüfbares Kriterium für die Existenz eines Potentials zum Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r})$.

 Beispiel: Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem Kraftfeld $\underline{F}(\underline{r})$ entlang der Raumkurve C von der Position $\underline{r}_a$ in die Position $\underline{r}_b$. Sei C die Bahnkurve des Teilchens $\underline{r}(t)$, also die Lösung der Newton´schen Bewegungsgleichung $m\ddot{\underline{r}}(t) = \underline{F}(\underline{r})$. Die entlang der Bahnkurve $\underline{r}(t)$ verrichtete Arbeit A

$$A = \int_{\underline{r}_1,C}^{\underline{r}_2} d\underline{r}\cdot\underline{F}(\underline{r}) = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\frac{d\underline{r}(t)}{dt}\cdot\underline{F}(\underline{r}(t)) = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2(t)\right) = T(t_2) - T(t_1)$$

ist gleich der Differenz der kinetischen Energien. Falls $\underline{F}(\underline{r})$ ein konservatives Kraftfeld ist, also $\underline{F}(\underline{r}) = -\operatorname{grad}U(\underline{r}) = -\frac{dU(\underline{r})}{d\underline{r}}$ und $\operatorname{rot}\underline{F}(\underline{r}) = 0$ erfüllt sind, folgt

$$A = \int_{\underline{r}_1,C}^{\underline{r}_2} d\underline{r}\cdot\underline{F}(\underline{r}) = -\int_{\underline{r}_1,C}^{\underline{r}_2} d\underline{r}\cdot\frac{dU(\underline{r})}{d\underline{r}} = -\int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} dU(\underline{r}) = -\big(U(\underline{r}_2) - U(\underline{r}_1)\big) = U(t_1) - U(t_2) = T(t_2) - T(t_1)$$

und damit $T(t_1) + U(t_1) = T(t_2) + U(t_2)$.

Fazit: Die in einem konservativen Kraftfeld verrichtete Arbeit ist vom Weg unabhängig und die Summe aus potentieller und kinetischer Energie E bleibt während der Bewegung konstant

$$E := T(\dot{\underline{r}}(t)) + U(\underline{r}(t)) = \text{const}.$$

E ist zeitunabhängig, auch wenn Position $\underline{r}(t)$ und Geschwindigkeit $\dot{\underline{r}}(t)$ sich in der Zeit ändern. Das Minuszeichen in der Definition von U sichert, dass die vom Kraftfeld an der Punktmasse verrichtete Arbeit deren potenzielle Energie erhöht.